Exercice 11 : Soit A_α la matrice :

$$A_\alpha := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \end{array}$$

1. Déterminer une famille génératrice, notée $\mathcal{F}_\alpha$, de $\operatorname{Im} A_\alpha$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} A_\alpha$.
3. Discuter des valeurs de α pour lesquelles :
   (a) le système $A_\alpha X = (1, 5, -1)$ admet une unique solution,
   (b) $\{X \in \mathbb{R}^3 \; : \; A_\alpha X = 0\}$ est un espace vectoriel,
   (c) la famille $\mathcal{F}_\alpha$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$,
   (d) la famille $\mathcal{F}_\alpha$ est liée,
   (e) la famille $\mathcal{F}_\alpha$ forme une base de $\mathbb{R}^3$,
   (f) le déterminant de A_α est égal à zéro,
   (g) la matrice A_α est inversible,
   (h) A_α est de rang 3,
   (i) l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,
   (j) le noyau de A_α est de dimension supérieure ou égale à 1,
   (k) le noyau de A_α est réduit au vecteur nul,
   (l) $\operatorname{Im} A_\alpha$ engendre $\mathbb{R}^3$,