Compactification de Freudhental

Seirios

Grossièrement, la compactification de Freudhental compactifie un espace topologique X en rajoutant un point pour chaque composante connexe à l'infini. L'exemple le plus commun est celui de $\overline{\mathbb{R}}$ qui est précisément le compactifié de Freudhental de $\mathbb{R}$; si l'on enlève un compact à la droite réelle, il reste deux composantes connexes non bornées, ce qui justifie l'introduction des deux infinis. Plus généralement :

Définition : Soit X un espace topologique admettant une suite croissante de compacts $(K_n)_n$ telle que $(\overset{\circ}{K_n})_n$ forme un recouvrement de X. Un bout (en anglais, *end*) de X est une suite décroissante $(C_n)_n$ de parties de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est une composante connexe de $X \backslash K_n$. On note $E(X)$ l'ensemble des bouts de X.

Définition : Soit X un espace topologique comme précédemment. Soit $\epsilon = (C_n)_n$ un bout de X. Pour tout ouvert U de X, on note $\epsilon < U$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_n \subset U$. La compactification de Freudhental de X est l'espace $\overline{X} = X \cup E(X)$ muni de la topologie ayant pour base $\{U \cup \{\epsilon \in E(X) \mid \epsilon < U\},\ U \subset X \text{ ouvert}\}$.

Le compactifié de Freudhental est donc défini pour des espaces topologiques admettant une telle suite de compacts ; les espaces topologiques localement compacts et σ-compacts (ou plus généralement hémicompact) font parti de cette catégorie. Pour qu'il s'agisse bien d'une compactification, d'autres hypothèses sont nécessaires :

Théorème : Soit X un espace topologique connexe, localement connexe admettant une suite croissante $(K_n)_n$ de compacts telle que $(\overset{\circ}{K_n})_n$ recouvre X. Alors $\overline{X}$ est compact.

Dans la suite, on dire qu'une partie $A \subset X$ est bornée si elle est relativement compacte dans X. Dans le cas contraire, on dira que A est non bornée.

Lemme : $E(X)$ est compact[1] dans $\overline{X}$.

Preuve : Soit $\epsilon = (C_n)_n$. Remarquons, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n n'est pas relativement compact dans X. En effet, s'il existait un entier $n \in \mathbb{N}$ tel C_n soit relativement compact, alors $(\overset{\circ}{K_n})_n$ serait un recouvrement d'ouverts de l'adhérence de C_n, donc il existerait un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $C_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} K_k = K_p$, ce qui impliquerait que pour tout $i \geq n$, on aurait $C_i = \emptyset$, ce qui est impossible.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\pi(X \backslash K_n)$ l'ensemble des composantes connexes non relativement compactes dans X de $X \backslash K_n$. Il existe clairement une application canonique $\phi : E(X) \to \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n)$.

En utilisant la compacité de K_n et la croissance de la suite de compacts, on montre qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset \overset{\circ}{K_p}$. Soit C une composante connexe de $X \backslash K_n$. Par connexité locale de X, C est ouvert dans X ; par connexité de X, C n'est pas fermé dans X, donc il existe $x \in \overline{C} \backslash C$. Supposons par l'absurde que $x \notin K_n$. Alors il existe une composante connexe C' de $X \backslash K_n$ telle que $x \in C'$. Comme C' est ouvert, il existe un voisinage $O \subset C'$ de x. Alors $x \in \overline{C}$ implique $O \cap C \neq \emptyset$, d'où $C \cap C' \neq \emptyset$ ce qui est contradictoire. Donc $x \in K_n$. On en déduit que $C \cap \overset{\circ}{K_p} \neq \emptyset$. En effet, il existe un voisinage ouvert $\Omega \subset K_p$ de x et par adhérence de x à C, $\Omega \cap C \neq \emptyset$.

1. C'est même un espace de Cantor, c'est-à-dire un espace topologique compact totalement discontinu.

C est connexe et on a l'union disjointe $C = \left(C \cap \overset{\circ}{K_p}\right) \cup (C \cap \partial K_p) \cup (C \cap (X \backslash K_p))$, donc si $C \cap \partial K_p = \emptyset$, alors nécessairement $C \subset K_p$ et C est alors relativement compact dans X. Comme les différentes composantes connexes de $X \backslash K_n$ sont disjointes, la compacité de la frontière de K_p impose qu'il n'y ait qu'un nombre fini de telles composantes intersectant ∂K_p. En particulier, d'après ce qui précède on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de composantes connexes non relativement compactes de $X \backslash K_n$, c'est-à-dire que $\pi(X \backslash K_n)$ est fini.

Si l'on muni les $\pi(X \backslash K_n)$ d'une topologie discrète, le théorème de Tykhonov implique donc que $\prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n)$ est compact. Pour montrer la compacité de $E(X)$, il est ainsi suffisant de montrer que l'application canonique ϕ introduit précédemment définit un homéomorphisme de $E(X)$ sur $\phi(E(X))$, et que $\phi(E(X))$ est fermé dans $\prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n)$.

On a $\phi(E(X)) = \left\{ (C_n)_n \in \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n) \mid \forall i \leq j, C_j \subset C_i \right\}$, or $C_j \subset C_i$ équivaut à dire que la composante connexe de C_j dans $X \backslash K_i$ est C_i, donc si l'on définit l'application ϕ_{ij} qui a une composante connexe de $X \backslash K_j$ associe sa composante connexe dans $X \backslash K_i$ (pour $i \leq j$), alors $\phi(E(X)) = \left\{ C = (C_n)_n \in \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n) \mid \forall i \leq j, \phi_{ij} \circ \mathrm{pr}_j(C) = \mathrm{pr}_i(C) \right\} = \bigcap_{i \leq j} M_{ij}$, en notant $M_{ij} = \left\{ C = (C_n)_n \in \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n) \mid \phi_{ij} \circ \mathrm{pr}_j(C) = \mathrm{pr}_i(C) \right\}$. Or les $\phi_{ij} : \pi(X \backslash K_j) \to \pi(X \backslash K_i)$ sont continues ($\pi(X \backslash X_j)$ est discret), les projections pr_i sont également continues (par définition de la topologie produit) et les $\pi(X \backslash K_i)$ sont séparés donc les M_{ij} sont fermés. Ainsi, $\phi(E(X))$ est bien fermé dans $\prod_{n=1}^{+\infty} \pi(X \backslash K_n)$.

Une base d'ouverts pour $\phi(E(X))$ peut être de la forme $\{(C_n)_n | C_{n_1} = C_1 \subset ... \subset C_{n_r} = C_r\}$ où C_i parcourt $\pi(X \backslash K_i)$ et où r parcourt $\mathbb{N}^*$. Donnons-nous un ouvert O de cette forme. Posons $\Omega = \{\epsilon \in E(X) | \forall 1 \leq i \leq r, \epsilon < C_{n_i}\} = \bigcap_{i=1}^{r} \{\epsilon \in E(X) | \epsilon < C_{n_i}\}$. Alors $\Omega = \bigcap_{i=1}^{r} (E(X) \cap \{C_{n_i} \cap \{\epsilon\} | \epsilon < C_{n_i}\})$ et $\{C_{n_i} \cap \{\epsilon\} | \epsilon < C_{n_i}\}$ est ouvert dans $\overline{X}$, donc Ω est ouvert dans $E(X)$. Comme $\phi(\Omega) \subset O$, on en déduit la continuité de ϕ.

Une base d'ouverts pour $E(X)$ est $\{\epsilon | \epsilon < U\}$ où U parcourt l'ensemble des ouverts de X. Donnons-nous un ouvert V de cette forme et notons pour tout $i \in \mathbb{N}$, ω_i l'ensemble des éléments de $\pi(X \backslash K_i)$ contenus dans U. Alors $\phi(U) = \{(C_n)_n | \exists i \in \mathbb{N}, C_i \subset U\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in \omega_i} \{(C_n)_n | C_i = C\}$, donc $\phi(U)$ est un ouvert. On en déduit que ϕ est ouverte et donc que ϕ est un homéomorphisme, ce qui achève la démonstration. □

Preuve du théorème : Montrons enfin que $\overline{X}$ est compact. Pour cela, donnons-nous un recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de $\overline{X}$. Par compacité de $E(X)$, il existe $J \subset I$ fini tel que pour tout bout $\epsilon = (C_n)_n \in E(X)$, il existe $j \in J$ tel que $\epsilon < O_j$; notons alors n_j le plus petit entier n tel que $C_n \subset O_j$. Posons $m = \max_{j \in J} n_j$. Alors $(O_j)_{j \in J}$ recouvre les composantes connexes non bornées de $X \backslash K_m$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_m \subset \overset{\circ}{K_p}$. Dans la démonstration du lemme précédent, on a vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de $X \backslash K_m$ coupant ∂K_p et que les autres sont incluses dans K_p. Par compacité, il existe alors un $K \subset I$ fini tel que $(O_k)_{k \in K}$ recouvre K_p et les composantes connexes bornées de $X \backslash K_m$ coupant ∂K_p. Finalement, on obtient que $(O_i)_{i \in J \cup K}$ est un sous-recouvrement fini de $\overline{X}$, ce qui termine notre démonstration. □

Remarquons qu'il est possible d'affaiblir les hypothèses sur la connexité de X. En effet, $\mathbb{N}$ est localement connexe, localement compact, σ-compact mais non connexe, et $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ puisque le complémentaire d'un compact n'a pas de composante connexe non bornée, ainsi $\overline{\mathbb{N}}$ n'est pas compact. Néanmoins, $\mathbb{R}^*$ est localement compact, σ-compact, localement connexe mais non connexe, et $\overline{\mathbb{R}^*} = \overline{\mathbb{R}}$ est compact.

Propriété : Soit X un espace topologique connexe, localement connexe admettant une suite croissante $(K_n)_n$ de compacts telle que $(\overset{\circ}{K_n})_n$ recouvre X. Alors X est un ouvert [2] connexe dense dans $\overline{X}$.

Les deux résultats précédents montrent bien que sous les hypothèses considérées, $\overline{X}$ est bien une compactification de X. En particulier, la compactification de Freudhental fait sens pour les espaces topologiques localement compacts, σ-compacts, connexes et localement connexes [3]. Cela peut sembler restrictif, mais il existe en fait de nombreux exemples de tels espaces, les CW-complexes notamment.

La construction du compactifié de Freudhental pourra sembler plus naturelle via la théorie des ultrafiltres. Pour compactifier un espace topologique, une manière systématique de procéder est de caractériser les ultrafiltres ne convergeant pas puis de rajouter des points de convergence ; pour la compactification de Freudhental, ces points de convergence seront les bouts de l'espace topologique. La caractérisation des ultrafiltres non convergeant est la suivante (où les hypothèses sur X sont les mêmes que précédemment) :

Lemme : Soient K un compact de X et W un ultrafiltre sur X ne convergeant pas. Alors il existe une composante connexe de $X\backslash K$ non bornée appartenant à W.

Preuve : Soit L un compact de X dont l'intérieur contient K et C une composante connexe de $X\backslash K$. De même que dans la démonstration du lemme précédent, on montre qu'il existe un point x dans l'adhérence de C dans X qui n'appartient pas à C ; nécessairement $x \in K$.

Ainsi, toute composante connexe de $X\backslash K$ est soit incluse dans l'intérieur de L, soit intersecte la frontière ∂L. Or W ne contient pas L, sans quoi la trace de W sur L formerait un ultrafiltre sur L convergeant par compacité et W convergerait alors nécessairement vers la même limite ; par conséquent, il ne contient aucune des composantes connexes incluses dans L. Plus généralement, le même argument montre que W ne peut contenir aucun compact. W contient donc l'union des composantes connexes de $X - K$ intersectant ∂L. Mais ces composantes sont des ouverts disjoints recouvrant le compact ∂L, elles sont donc nécessairement en nombre fini. On en déduit que l'une d'entre elles appartient à W. De plus, cette composante ne peut être relativement compact dans X, sans quoi son adhérence dans X appartiendrait à W, adhérence qui est compacte. $\square$

Ainsi, si W est un ultrafiltre sur X non convergeant, alors W contient une composante connexe non bornée C_n de $X\backslash K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme W est stable par intersection et que $\emptyset \notin W$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_{n+1} \subset C_n$. Par conséquent, il est claire que dans $\overline{X}$, l'ultrafiltre W convergera vers le bout $\epsilon = (C_n)_n$.

Qu'en est-il de la dépendance en la suite de compacts choisie ? En fait il n'y en a aucune :

Le lemme ci-dessus montre plus généralement que l'on peut associer à tout ultrafiltre non convergeant sur X une fonction f qui à un compact de X fait correspondre une composante connexe non bornée de $X\backslash K$. On peut alors définir un bout de X par la donnée d'une telle fonction et introduire la même topologie sur $\overline{X}$ que précédemment où l'expression $\epsilon < U$ signifira que $f(K) \in U$ pour un certain compact K. On obtient de la même manière une compactification de X, qui coïncide en fait avec $\overline{X}$ puisque la donnée d'un bout par une suite de composantes connexes $(C_n)_n$ permet de trouver une fonction f comme précédemment : pour un compact K de X, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$, et f envoie alors K sur la composante connexe de $X - K$ contenant C_n.

La compactification de Freudhental peut donc se formaliser sans se donner une suite de compacts, montrant que la construction ne dépend pas du choix d'une telle suite. En pratique, l'introduction d'une suite de compacts sera bien plus aisée.

Propriété : Si X et Y sont homéomorphes, alors il existe un homéomorphisme entre $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ envoyant X sur Y. Réciproquement, s'il existe un homéomorphisme entre $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, alors sa restriction à X constitue un homéomorphisme de X dans Y.

2. Plus généralement, X est localement compact si, et seulement si, il est ouvert dans ses compactifications.
3. Un tel espace est un *continuum généralisé*.

Preuve : Soit $\varphi : X \to Y$ un homéomorphisme. Donnons-nous une suite de compacts $(K_n)_n$ dont les intérieurs recouvrent X. Alors $(\varphi(K_n))_n$ constitue une suite similaire pour Y. On étend φ en une application $\tilde{\varphi} : \overline{X} \to \overline{Y}$ de la fonction suivante : pour tout bout $\epsilon = (C_n)_n$ de X, $\tilde{\varphi}(\epsilon)$ correspond au bout $(\varphi(C_n))_n$ de Y. On vérifie que $\tilde{\varphi}$ définit un homéomorphisme. Réciproquement, puisque un homéomorphisme laisse stable les intérieurs et les frontières, on en déduit que si l'on dispose d'un homéomorphisme $\psi : \overline{X} \to \overline{Y}$, alors la restriction à l'intérieur de $\overline{X}$, $\psi_{|X}$, forme un homéorphisme de X vers Y. $\square$

Corollaire : Si X et Y sont homéomorphes, alors ces deux espaces ont le même nombre de bouts.

Preuve : Soit $\varphi : X \to Y$ un homéomorphisme. D'après la propriété précédente, φ s'étend en un homéomorphisme $\tilde{\varphi} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Par restriction, $\tilde{\varphi}_{|\partial\overline{X}}$ forme un homéomorphisme de $\partial\overline{X} = E(X)$ vers $\partial\overline{Y} = E(Y)$. Ainsi, on en déduit l'égalité des cardinaux $|E(Y)| = |\partial\overline{Y}| = |\tilde{\varphi}\left(\partial\overline{X}\right)| = |\partial\overline{X}| = |E(X)|$. $\square$

Le nombre de bouts devient donc un invariant topologique. Donnons quelques exemples :

(i) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ ne sont pas isomorphes. En prenant pour suite de compacts une suite croissante de boules fermées, on trouve que $\mathbb{R}$ possède deux bouts et $\mathbb{R}^n$ un seul. Ce résultat est classiquement montré par un simple argument de connexité : privé d'un point, $\mathbb{R}$ n'est plus connexe alors que $\mathbb{R}^n$ l'est.

(ii) $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas isomorphes. On a vu dans l'exemple précédente que $\mathbb{R}^m$ possède un seul bout. Pour $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, on prend pour suite de compacts une suite croissante de couronnes dont le rayon interne converge vers zéro et le rayon externe diverge vers l'infini ; on montre ainsi que $\mathbb{R}^n\backslash$ possède deux bouts. Une autre méthode possible est de montrer que $\mathbb{R}^m$ est simplement connexe et $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ non.

(iii) $\mathbb{R}^n\backslash R$ et $\mathbb{R}^m\backslash S$ ne sont pas isomorphes si S et R sont des ensembles finis de cardinaux différents. Il s'agit d'une généralisation de l'exemple précédent. Une méthode alternative serait de décrire les groupes fondamentaux de ces deux espaces.

Dans X, le complémentaire d'un compact K_n ayant un nombre fini de composantes connexes non bornées et un bout étant la donnée d'une suite de telles composantes, on en déduit que nécessairement $|E(X)| \leq \aleph_0$. De plus, sous cette borne, toutes les valeurs sont possibles. En effet, si $\mathcal{S}_n = [0,n] \times \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{n} \{k\} \times [0,+\infty[$ et $\mathcal{S}_\infty = [0,+\infty[\times\{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{k\} \times [0,+\infty[$, alors $\mathcal{S}_n$ a n bouts et $\mathcal{S}_\infty$ a une infinité dénombrable de bouts.

La compactification de Freudhental peut cohabiter avec la compactification d'Alexandroff, qui est définissable sur tout espace topologique localement compact. Il arrive que ces deux espaces soient homéomorphes. Plus précisément :

Propriété : Les compactifications de Freudhental et d'Alexandroff coïncident si, et seulement si, X est compact ou ne contient qu'un seul bout.

Preuve : Si X est compact, les compactifiés de Freudhental et d'Alexandroff correspondent à X ; en particulier, elles coïncident. Supposons donc X non compact.

Il est clair qu'avoir un unique bout est une condition nécessaire, puisque le cardinal de la frontière du compactifié de Freudhental correspond au nombre de bouts de X et celui de la frontière du compactifié d'Alexandroff vaut toujours 1. Réciproquement, supposons que X possède un unique bout. Notons $X \cup \{\epsilon\}$ le compactifié de Freudhental et $X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff. On étend alors l'identité sur X par $\varphi : X \cup \{\epsilon\} \to X \cup \{\infty\}$ en envoyant ϵ sur ∞. Il s'agit clairement d'une bijection. De plus, par compacité des compactifiés, φ est une application fermée donc φ^{-1} est continue.

Rappelons qu'une base fondamentale de voisinages de ∞ dans $X \cup \{\infty\}$ est $\{(X\backslash K) \cup \{\infty\},\ K \text{ compact}\}$. Soit donc K un compact de X. Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $K \subset K_n$ et si C est une composante connexe non bornée de $X\backslash K$, alors $C \cup \{\epsilon\}$ est un voisinage de

ϵ et $\varphi(C \cup \{\epsilon\}) \subset (X\backslash K) \cup \{\infty\}$, d'où la continuité de φ. On en déduit que φ est un homéomorphisme, ce qui clôt notre démonstration. $\square$

Terminons ce document en considérant une application qui nous vient de la théorie géométrique des groupes. En effet, on peut associer à tout groupe de type fini, une fois un système de générateurs fini fixé, un graphe dit de Cayley. Or le complexe simplicial associé à un tel graphe constitue un exemple de continuum généralisé, il est donc possible de considérer son compactifié de Freudhental. De plus, le nombre de bouts trouvé est invariant par quasi-isométrie, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du système de générateurs choisi, c'est une propriété du groupe.

Il est également possible de définir le nombre de bouts d'un groupe de manière plus combinatoire, définition qui reste en accord avec la construction de la compactification de Freudhental que nous venons de donner :

Définition : Soient G un groupe de type fini et S un système de générateurs fini. Notons $\Gamma_{G,S}$ le graphe de Cayley associé. Le nombre de bouts de G est la limite (éventuellement infinie) $\lim\limits_{n \to +\infty} ||\Gamma_{G,S}\backslash B(e,n)||$ du nombre de composantes connexes du graphe obtenu en enlevant la boule centrée en l'élément neutre e de rayon n au graphe $\Gamma_{G,S}$.

Contrairement aux espaces topologiques, un groupe ne peut toutefois avoir un nombre quelque de bouts. Le théorème de Freudhental-Hopf assure en effet qu'il ne peut en avoir seulement zéro, un, deux ou une infinité. Une classification est alors possible : les groupes ne contenant aucun bout sont les groupes finis, ceux en contenant deux sont les groupes contenant un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$ et ceux en contenant une infinité sont les groupes pouvant s'écrire comme un produit libre non trivial. Les groupes contenant un unique bout offre cependant une plus grande diversité et leur caractérisation reste un sujet de recherche.

Références

[1] *Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, N. Bourbaki, Springer (1971).

[2] *Infinite homotopy theory*, H.-J. Baues et A. Quintero, Kluwer Academic Publishers (2001).

[3] *Groups, graphs and trees : An introduction to the theory of infinite groups*, J. Meier, Cambridge University Press (2008).