Introduction à l'algèbre tensorielle.

Miss(Julia) et Man(Romain)

27 mai 2012

Le but de ce document est de définir la notion de produit tensoriel et la notion de tenseur. Nous donnons une présentation moderne de la notion de produit tensoriel, tout en restant dans un cadre relativement modeste (celui des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, parfois même en nous limitant à la dimension finie). L'intérêt de cette construction est au moins double. Elle permet de définir directement le produit tensoriel de deux espaces quelconques, sans restriction de dimension (ou même de corps de définition), et évite le recours, habituellement présenté aux étudiants en physique, à la "double dualisation" (on voit le produit tensoriel comme son bidual qui s'identifie naturellement à un certain espace de forme multi-linéaire).

De plus, elle met au centre de la construction le produit tensoriel et sa propriété universelle, ce qui permet de voir le produit tensoriel sous un jour plus clair, une construction permettant de construire un troisième espace à partir de deux premiers espaces au moyen d'une propriété universelle. Il est en ce sens, un "cousin" de la somme directe ou du produit cartésien (qui peuvent eux aussi être construits de la même manière).

Le deuxième avantage est de rendre toutes les constructions canoniques (du moins celles qui peuvent l'être) et du coup cela allège considérablement la présentation géométrique du calcul différentiel sur les variétés différentielles, tel qu'il est nécessaire en géométrie. Enfin, sous cette forme, l'algèbre tensorielle apparait simplement comme un outil d'algèbre multi-linéaire et peut s'appliquer à tout un tas de problèmes dans des contextes divers.

Rappelons que l'on dit qu'un diagramme commute quand la composition des flèches amenant d'un espace à un autre donne le même résultat quel que soit le chemin suivi.

Les deux auteurs tiennent à remercier Amanuensis pour ses remarques, suggestions, ainsi que sa relecture avisée.

1 Définition, généralités

Le produit tensoriel a pour vocation première de ramener des problèmes multilinéaires à des problèmes linéaires. Ainsi construire le produit tensoriel de deux espaces, permet de considérer les applications bilinéaires sur ces deux espaces comme de simples applications linéaires sur leur produit tensoriel. En quelque sorte la bilinéarité passe de l'application à l'espace. Une appellation sans doute plus parlante pour le produit tensoriel aurait d'ailleurs été produit bilinéaire. Voyons cette construction en détail.

1.1 Propriété universelle, existence, unicité

Définition 1.1.1. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On dit que E et F admettent un produit tensoriel (au dessus de $\mathbb{R}$) ssi il existe un espace vectoriel T muni d'une application bilinéaire $\theta : E \times F \to T$ tels que pour tout espace vectoriel S et pour tout application bilinéaire $f : E \times F \to S$, il existe une unique application linéaire $\overline{f}$ telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\theta"] & S \\ & T \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Cette propriété est appelée propriété universelle du produit tensoriel.

Autrement dit, il est équivalent de se donner une application bilinéaire de $E \times F$ ou de se donner une application linéaire du produit tensoriel de E et F. Nous allons tout de suite voir que la propriété définissant le produit tensoriel le caractérise de manière unique.

Proposition 1.1.2. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Si T_1 et T_2 sont deux produits tensoriels de E et F, alors il existe un isomorphisme canonique entre T_1 et T_2.*

Démonstration. Soit donc E, F, T_1, T_2 comme dans la propositions, nous avons θ_1 une application bilinéaire de $E \times F$ dans T_1, elle se factorise donc à travers T_2 suivant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[dr, "\theta_2"'] & T_1 \\ & T_2 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Nous avons ainsi une application linéaire $\varphi : T_2 \to T_1$. De la même manière en inversant T_1 et T_2 nous avons une application linéaire ψ de T_1 dans T_2. Nous allons prouver que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{T_1}$, et que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{T_2}$. Par symétrie il nous suffit de prouver que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{T_1}$.
Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[rr, "\theta_1"] \arrow[dr, "\theta_2"] \arrow[dd, "\theta_1"'] & & T_1 \\ & T_2 \arrow[ur, "\varphi"] & \\ T_1 \arrow[ur, "\psi"] & & \end{tikzcd}$$

Il s'ensuite que $\theta_1 = \varphi \circ \psi \circ \theta_1$ et donc par unicité de l'application $\overline{f}$ dans la propriété universelle du produit tensoriel, $\mathrm{Id} = \varphi \circ \psi$. □

Le produit tensoriel de E et F, s'il existe est donc unique à isomorphisme canonique près, nous les identifierons donc tous et on parlera "du" produit tensoriel de E et de F, noté $E \otimes F$, et nous noterons $a \otimes b$ au lieu de $\theta(a, b)$.

A priori rien n'indique que le produit tensoriel de E et de F existe toujours, c'est en fait toujours le cas. Rappelons que si S est un ensemble quelconque on peut toujours construire un espace vectoriel noté $\mathbb{R}^{(S)}$ dont une base est indexée par les éléments de S, il suffit de considérer l'espace des fonctions à support compact de S à valeurs dans $\mathbb{R}$, où S est muni de la topologie discrète, une base est alors donnée par les fonctions δ_s, valant 1 en s et 0, ailleurs.

Lemme 1.1.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels. Le produit tensoriel de E et de F existe toujours.*

Démonstration. Construisons tout d'abord l'espace vectoriel dont une base est indexée par $E \times F$, que nous noterons G, on note $[e, f]$ l'élément de la base indexé par (e, f) pour e et f des éléments quelconques de E et F. Appelons T le sous espace de G engendré par les familles de vecteurs $\{[e, f] + [e, f'] - [e, f + f']; [e, f] + [e', f] - [e + e', f]; \lambda[e, f] - [\lambda e, f]; \lambda[e, f] - [e, \lambda f] | \lambda \in \mathbb{R}, e, e' \in E, f, f' \in F\}$. Appelons R le quotient de G par T. On note $e \otimes f$ l'image de $[e, f]$ dans R. Nous avons une application bilinéaire naturelle de $E \times F$ dans R, donnée par $\theta(e, f) = e \otimes f$. Il est immédiat de vérifier que (R, θ) vérifie bien la propriété universelle. □

Proposition 1.1.4. *Le sous espace de $E \otimes F$ engendré par les $e \otimes f$, pour e dans E, et f dans F, est égal à $E \otimes F$ tout entier. Autrement dit tout élément de $E \otimes F$ est somme d'éléments de la forme $e \otimes f$, un tel élément est parfois appelé tenseur simple, ou tenseur pur.*

Démonstration. Notons R le sous espace de $E \otimes F$ engendré par tous les tenseurs simples. Nous avons une application bilinéaire de $E \times F$ dans $E \otimes F/R$ donné par le composé de $\otimes$ et du passage au quotient, il est clair que cette application est identiquement nulle. Par unicité de la factorisation de l'application bilinéaire nulle de $E \times F$ dans $E \otimes F/R$, l'application de passage au quotient est alors l'application nulle. Et donc $R = E \otimes F$. □

1.2 Bases, dimension, adjonction

Commençons par prouver la formule dite d'adjonction

Proposition 1.2.1. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(E \otimes F, G) \simeq \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F, G))$$

Démonstration. Le terme de gauche étant par définition naturellement isomorphe à l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G, noté $\mathrm{Bilin}(E, F; G)$, il suffit donc de prouver que ce dernier espace est isomorphe au terme de droite. Nous avons un isomorphisme donné par

$$\varphi \mapsto \{\psi : e \mapsto \varphi(e, .)\}$$

La réciproque de cet isomorphisme est donnée par

$$\psi \mapsto \{\varphi : (e, f) \mapsto \psi(e)(f)\}$$

Nous avons donc

$$\mathrm{Hom}(E \otimes F, G) \simeq \mathrm{Bilin}(E, F; G) \simeq \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F, G))$$

□

Corollaire 1.2.2. *Il existe un isomorphisme $E \otimes \mathbb{R} \simeq E$, donné par $a \otimes e \mapsto a.e$*

Le lecteur connaissant un peu de théorie des catégories remarquera que la propriété précédente revient à dire que le foncteur de tensorisation par F admet un adjoint à droite $\mathrm{Hom}(F, .)$, ce qui suffit à garantir qu'il commute aux limites inductives et donc préserve les sommes directes, comme illustré par la proposition suivante [1].

Proposition 1.2.3. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une base de F, alors une base de $E \otimes F$ est donnée par $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$*

Démonstration. Prouvons le résultat plus général suivant, si E, F_i sont des espaces vectoriels, alors il existe un isomorphisme canonique

$$E \otimes (\bigoplus_{i\in I} F_i) \simeq \bigoplus_{i\in I}(E \otimes F_i)$$

Il suffit pour cela de prouver que les deux membres vérifient la propriété universelle de la définition. Or se donner une application bilinéaire de $E \times (\oplus F_i)$ dans S, c'est se donner une application linéaire de E dans $\mathrm{Hom}(\oplus F_i, S)$, par la formule d'adjonction, mais ce dernier est canoniquement isomorphe à $\prod_i \mathrm{Hom}(F_i, S)$, ce qui est équivalent à se donner I applications bilinéaires de $E \times F_i$ dans T.

Pour achever la preuve de la proposition proprement dite, il suffit de remarquer que

$$(\bigoplus_i \mathbb{R}e_i) \otimes F = \bigoplus_i (\mathbb{R}e_i \otimes F) = \bigoplus_i \bigoplus_j \mathbb{R}e_i \otimes \mathbb{R}f_j$$

□

Corollaire 1.2.4. *Si $\dim E = n$, et $\dim F = m$, alors $dim(E \otimes F) = mn$*

Dans le même genre de trivialité le lecteur pourra prouver que $E \otimes F \simeq F \otimes E$ et que $E \otimes (F \otimes G) \simeq (E \otimes F) \otimes G$. Le lecteur pourra aussi prouver que l'espace $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ jouit d'une propriété universelle analogue à celle de $E \otimes F$ mais pour les applications n-linéaires.

2 Tenseurs

En physique la dénomination tenseur, est en général appliqué à un type très précis de produit tensoriel, nommément, on se fixe un espace E, et on regarde le produit tensoriel de m copies de E, tensorisé avec le produit tensoriel de n copies de E^*, le dual de E. Nous commençons par quelques rappels de dualité.

1. Notons quand même que commuter aux limites inductives est beaucoup plus fort que de préserver les sommes directes.

2.1 Dualité

Définition 2.1.1. *Soit E un espace vectoriel, on appelle dual de E, et on note E^*, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}(E,\mathbb{R})$. *On appelle forme linéaire sur E, un élément du dual (on dit parfois aussi co-vecteur). Si φ est une forme linéaire on note parfois $\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)$, et l'on nomme crochet de dualité le pairing de $E^* \times E$ ainsi défini.* [2]*.*

Remarque 2.1.2. Notons que le pairing $E \times E^*$ est bilinéaire, et à ce titre se factorise à travers le produit tensoriel $E \times E^* \to E \otimes E^* \to \mathbb{R}$.

Proposition 2.1.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors il existe une application linéaire $f^* : F^* \to E^*$, telle que si E, F, G sont trois espaces vectoriels et $f : E \to F$, et $g : F \to G$, on ait $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Démonstration. Soit donc $f : E \to F$, et φ une forme linéaire sur F, on pose $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Il est clair que $f^*(\varphi)$ est une forme linéaire, de plus $(f \circ g)^*(\varphi) = \varphi \circ f \circ g = g^*(f^*(\varphi))$ □

On appelle souvent f^*, la transposée de f, cette appellation sera expliquée un peu plus bas.

Proposition 2.1.4. *Soit f une application linéaire entre espaces vectoriels, E et F. Alors*

1. *Si f est injective, alors f^* est surjective.*
2. *Si f est surjective, alors f^* est injective.*

Démonstration. Supposons f injective. Comme f est injective, il existe alors g une application linéaire de F dans E telle que $gof = \mathrm{Id}_E$ [3], il est maintenant temps de remarquer que $\mathrm{Id}_{E^*} = \mathrm{Id}_E^*$, du coup on obtient $f^* \circ g^* = \mathrm{Id}_{E^*}$, ceci assure que f^* est surjective.
L'injectivité de f^* sous l'hypothèse f surjective se prouve de la même façon. □

Encore une fois, le lecteur connaissant un peu de théorie des catégories, saura reconnaitre que nous avons prouvé que la dualisation d'un espace est un foncteur (contravariant) et que nous avons (presque) prouvé que celui-ci était exact (il reste l'exactitude "au milieu" à prouver). Prouvons maintenant quelques théorèmes propres à la dimension finie

Proposition 2.1.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors E^* est de même dimension que E.*

Démonstration. Soit $(e_i)_{i\in[1,n]}$ une base de E. Alors construisons la famille $(e_i^*)_{i\in[1,n]}$ définie de la manière suivante : $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, $\delta_{i,j}$ est ici le symbole de Kronecker, et vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Alors prouvons d'abord que (e_i^*) est libre. Soit $t_1e_1^*+...+t_ne_n^*$ une combinaison linéaire nulle des e_i^*, alors $t_1e_1^*+...+t_ne_n^*(e_k) = t_k = 0$, et ce pour k quelconque. Pour le caractère générateur, soit φ une forme linéaire sur E, quelconque, notons $t_i = \varphi(e_i)$, et regardons $\psi = t_1e_1^* + ... + t_ne_n^*$, alors $\psi - \varphi(e_k) = 0$ et ce pour tout k quelconque. Donc $\psi - \varphi$ est nulle sur la base, et donc nulle. □

Nous avons ainsi exhibé un isomorphisme entre E et E^*, notons toutefois que cet isomorphisme n'est pas du tout canonique. Il est en effet impossible d'en définir un qui soit naturel. Il y a toutefois une isomorphisme canonique, toujours dans le cas de la dimension finie, entre E et son bidual $(E^*)^*$, défini par $x \mapsto x^{**}$, avec $x^{**}(\varphi) = \varphi(x)$. Il est facile de voir que ce morphisme est injectif. L'égalité des dimensions entre un espace de dimension finie et son dual donne donc le

Corollaire 2.1.6. *Il existe un isomorphisme canonique entre E et son bidual, quand E est de dimension finie.*

Remarque 2.1.7. Si $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, l'espace vectoriel des suites réelles, nulles à partie d'un certain rang, alors $E^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Si la "famille duale" associée à une base de E, est toujours libre, elle n'est plus génératrice, par exemple, la forme linéaire sur E définie par $\varphi((a0, ..., a_n,)) = a_0+a_1+...+a_n+...$ (la somme a bien un sens puisque la suite est nulle à partir d'un certain rang) est une forme linéaire qui n'est pas dans l'espace engendré la "famille duale" à la base canonique.

2. J'ai du mal a savoir si cette notation est une bonne ou une mauvaise chose pour la compréhension, aussi dans le doute nous ne l'utiliserons pas

3. On utilise ici l'axiome du choix, le lecteur peu désireux d'utiliser un tel axiome, via le lemme de Zorn, peut supposer E et F de dimension finie, le choix de bases de E et de F permet de construire l'application g à la main

Si E est de dimension infinie alors il n'est pas isomorphe à son dual, mais cela est plus délicat à prouver. La preuve consiste à montrer que si E est dimension infinie, alors son dual est de dimension égale à son cardinal.

Proposition 2.1.8. *Si E et F sont de dimension finie, et que l'on en choisit une base $(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $(f_j)_{f_j\in[1,m]}$, alors si f est une application linéaire de E dans F donnée dans les bases $(e_i),(f_j)$ par une matrice M, alors la matrice de f^* dans les bases $(f_j^*),(e_i^*)$ est donnée par la transposée de M.*

Démonstration. Par définition le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice M vaut $f_i^*(f(e_j)) = f^*(f_i^*)(e_j) = e_j^{**}(f^*(f_j^*))$, ce qui est par définition le coefficient (j,i) de la matrice de f^* dans les bases (f_j^*) et (e_i^*) □

2.2 Orthogonalité

Comme nous avons vu dans la section précédente, si E est un espace de dimension finie, alors il est isomorphe à son dual. Cependant il n'est pas possible d'exhiber un isomorphisme canonique. L'ajout de structure supplémentaire sur E permet de pallier à ce défaut.

Définition 2.2.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E, la donnée d'une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur E. Nous appellerons espace hermitien, un espace de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Nous noterons en général $(.|.)$, le produit scalaire.*

Théorème 2.2.2 (Schmidt)**.** *Soit E un espace euclidien, alors si $(e_i)_{i\in[1,n]}$ est une base de E, il existe une unique base, $(h_i)_{i\in[1,n]}$ orthonormée telle que la matrice de passage de (e) à (h) soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.*

Démonstration. Prouvons tout d'abord l'existence. Si $n = 1$, alors on pose $h_1 = e_1/\|e_1\|$. Supposons avoir prouvé le résultat pour $1,...n$. Prenons alors $e_i, i = 1...n+1$ une base de E, il existe alors $h_i, i = 1...n$ une famille libre telle que l'espace engendré par les h_i soit le même que l'espace engendré par les e_i pour $i \leq n$ et tel qu'en restriction à ce sous espace la matrice de passage de $(e_i)_{i\in[1,n]}$ à $(h_i)_{i\in[1,n]}$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs. Posons alors $u = e_{n+1} - (h_n|e_n)h_n - ... - (h_1|e_1)h_1$, un petit calcul assure que u est orthogonal à tous les h_i, posons alors $h_{n+1} = u/\|u\|$. La matrice de passage de (e) à (h) est évidemment triangulaire supérieure, d'autre part $(h_{n+1}|e_{n+1}) = (u|e_{n+1})/\|u\| = \|e_{n+1}\|/\|u\| > 0$.

L'unicité se prouve de la même façon. Si $n = 1$, alors $h_1 = ae_1$, le fait que h_1 soit normé impose $|a| = \|e_1\|^{-1}$ mais le fait que la matrice de passage soit à termes diagonaux positif impose $a = \|e_1\|^{-1}$. Supposons avoir prouvé l'unicité pour $1,...n$. Soit donc E de dimension $n+1$ et (e_i) la base considérée, soit donc (h_i) et (f_i) deux bases de E vérifiant les conditions du théorème. Alors comme la matrice de passage de (e) à (h) est triangulaire supérieure alors il s'en suite que l'espace engendré par les h_i pour $i \leq n$ est le même que celui engendré pas les e_i pour $i \leq n$, et bien sur c'est la même chose pour les f_i pour $i \leq n$, notons V ce sous espace. Maintenant $h_{n+1} = a_{n+1}f_{n+1} + a_nf_n... + a_1f_1 =$, on en déduit $(h_{n+1}|f_i) = a_i = 0$, puisque h_{n+1} est orthogonal à V, donc $h_{n+1} = a_{n+1}f_{n+1}$, la condition de normalisation assure $a_{n+1} = \pm 1$, on doit de plus avoir $a_{n+1} > 0$, donc $a_{n+1} = 1$, donc $h_{n+1} = f_{n+1}$. □

Proposition 2.2.3. *Il existe un isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual.*

Démonstration. Soit $a \in E$ et notons ψ_a la forme linéaire définie par $\psi_a(x) = (a|x)$, alors $a \mapsto \psi_a$ donne une injection de E dans E^*, l'égalité des dimensions entre ces deux espaces achève la preuve. □

Remarque 2.2.4. Sous cet isomorphisme on peut identifier l'orthogonalité au sens de la dualité, et l'orthogonalité au sens du produit scalaire.

2.3 Tenseurs

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 2.3.1. *Soit E un espace vectoriel, on appelle tenseur de type (n,m) sur E, tout élément de $E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*$, où il y a n copies de E et m copies de E^*. Nous noterons $E^{(n,m)}$ l'espace des tenseurs de type (n,m) sur E.*

L'isomorphisme classique suivant permet de souvent identifier endomorphismes et tenseurs, ce qui explique que l'on entend parfois qu'une matrice est un tenseur d'ordre 2.

Proposition 2.3.2. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces de dimension finie, alors on a un isomorphisme canonique de $E^* \otimes F$ sur* $\mathrm{Hom}(E, F)$.

Démonstration. Posons

$$L : \begin{cases} E^* \otimes F & \to & \mathrm{Hom}(E, F) \\ \varphi \otimes f & \mapsto & \{x \mapsto \varphi(x) f\} \end{cases}$$

Cette application est bien sur injective, et donc surjective pour des raisons de dimension. □

Remarque 2.3.3. Dans le cas général l'image de l'application ainsi définie est l'ensemble des applications linéaires de rang fini.

Voyons comment se comporte l'espace des tenseurs par dualisation. Notons tout d'abord que la proposition précédente est un cas particulièr de la proposition suivante.

Proposition 2.3.4. *Soit E, F, G, H quatre espaces vectoriels, il existe une application naturelle, notée ι, de* $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes \mathrm{Hom}(G, H)$ *dans* $\mathrm{Hom}(E \otimes G, F \otimes H)$ *donnée par $\varphi \otimes \psi(e \otimes g) = \varphi(e) \otimes \psi(g)$. Cette application est toujours injective, elle est de plus un isomorphisme si E, F, G, H sont de dimensions finies.*

Démonstration. Commençons d'abord par remarquer que si E et G sont de dimension 1 le résultat est évident. De même si H et F sont de dimensions 1. Pour achever la preuve il nous suffit de remarquer $E = E_1 \oplus E_2$ et $G = G_1 \oplus G_2$ alors l'application naturelle de $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes \mathrm{Hom}(G, H)$ dans $\mathrm{Hom}(E \otimes G, F \otimes H$ est la somme directe des applications de $\mathrm{Hom}(E_i, F) \otimes \mathrm{Hom}(G_i, H)$ dans $\mathrm{Hom}(E \otimes G, F \otimes H)$ (la matrice est diagonale par bloc). De même si $F = F_1 \oplus F_2$ et $H = H_1 \oplus H_2$. Pour conclure il nous suffit alors de remarquer que si f et g sont deux applications linéaires, alors $f \oplus g$ est injective ssi f et g le sont.

Dans le cas de dimension finie, un examen des dimensions assure la surjectivité. □

Remarque 2.3.5. Cela fait plusieurs fois que nous prouvons des résultats, où dans la preuve, "rien ne semble se passer", les propositions résultent en fait de considérations fonctorielles complètement générales (et faciles). Cela a l'avantage de donner des preuves économiques (peu de calculs), et très générales qui peuvent s'adapter dans des contextes très differents. Le lecteur plus "concret" pourra s'il le désire donner des arguments plus terre à terre pour ces preuves.

Corollaire 2.3.6. *Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, alors $(E \otimes F)^* \simeq E^* \otimes F^*$.*

Remarque 2.3.7. Si E et F sont de dimension infinie, il n'y a qu'une injection, comme déjà noté lors de la remarque 2.1.7.

Corollaire 2.3.8. *Dans le cas où E est de dimension finie, alors le dual de $E^{(n,k)}$ est donc isomorphe à $E^{(k,n)}$.*

2.4 Algèbre tensorielle, contraction, trace.

On note $T(E)$ l'espace vectoriel bi-gradué

$$T(E) = \bigoplus_{n,k} E^{(n,k)}$$

Nous allons en faire une algèbre (bi-graduée).

Proposition 2.4.1. *Il existe une application bilinéaire de $E^{(n,k)} \times E^{(m,\ell)}$ dans $E^{(n+m,k+\ell)}$.*

Démonstration. Il suffit de composer l'application $(a, b) \mapsto a \otimes b$ de $E^{(n,k)} \times E^{(m,\ell)}$ dans $E^{(n,k)} \otimes E^{(m,\ell)}$ avec l'isomorphisme naturel $E^{(n,k)} \otimes E^{(m,\ell)} \to E^{(n+m,k+\ell)}$ □

Nous pouvons aussi définir un "crochet de dualité généralisé", que l'on appelle en général contraction.

Définition 2.4.2. *On appelle contraction l'application $E^{(n,k)} \to E^{(n-1,k-1)}$ définie par le pairing naturel* $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k \mapsto \varphi_1(a_1) a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_k$

Cette opération de contraction permet de retrouver la composition des endomorphismes comme illustré par la

Proposition 2.4.3. *Nous avons un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
E^* \otimes F \otimes F^* \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"] & \mathrm{Hom}(E,F) \otimes \mathrm{Hom}(F,G) \arrow[d, "\circ"] \\
E^* \otimes G \arrow[r] & \mathrm{Hom}(E,G)
\end{tikzcd}$$

Où $\circ$ désigne la composition $f \otimes g \mapsto g \circ f$, et κ le crochet de dualité (ou contraction) sur $F^{(1,1)}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'assertion sur les tenseurs simples, là où elle est évidente. □

Remarque 2.4.4. La contraction sur $E \otimes E^*$ n'est rien d'autre que l'application trace sur $\mathrm{End}(E)$ via l'isomorphisme ι. Notons aussi que le produit scalaire est naturellement un élément de $E^{(0,2)}$, la composée du produit et de la contraction, $E^{(0,2)} \otimes E^{(1,0)} \to E^{(1,2)} \to E^{(0,1)}$ fournit l'isomorphisme entre E et son dual donné par le produit scalaire.

Remarque 2.4.5. Dans le cas des espaces de dimensions finies, nous pouvons retomber sur nos pattes et faire le lien avec la définition plus "physicienne" des tenseurs. Nous avons en effet un isomorphisme canonique de $E^{(n,k)}$ sur son bidual $(E^{(k,n)})^*$, et donc un tenseur d'ordre (n,k) est une application $(n+k)$-linéaire sur $E \times ... \times E \times E^* \times ... \times E^*$ (avec k copies de E et n de E^*). Si cette dernière définition est sans doute plus concrète, la notion de produit tensoriel et toutes les idées catégoriques qu'il y a derrière sa construction, nous paraîssent, in fine, beaucoup plus puissantes et fécondes. De plus une bonne compréhension du produit tensoriel sous cette forme permet de l'utiliser dans absolument tous les cadres où il apparaît naturellement tant en physique, qu'en mathématiques.