Corrigé de l'Examen 2, 2011-2012

Exercice I - 5 - 10 - 2 - 8

1) Il n'y a pas de singularité intérieure.

– On a $\lim_{t\to 0^+} = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}} = -\infty$. Donc 0 est une singularité.

– En 1 on a : $\ln t \sim_1 t-1$, d'où $-f(t) \sim_1 \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$. Donc 1 est une singularité.

2) La fonction $f(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$ est continue et négative sur $]0,1[$.

On pose $I = I_1 + I_2 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dt + \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dt$ et on traite séparément les intégrales généralisées I_1 et I_2.

Pour I_1, on écrit $\lim_{x\to 0^+} t^{1/4}\ln t = 0$. Par suite, au voisinage de 0^+ on a : $0 \le -t^{1/4}\ln t \le 1$, d'où :

$$0 \le -f(t) \sim_{0^+} \frac{-\ln t}{\sqrt{t}} \le \frac{1}{t^{3/4}}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{3/4}}dt$ converge et $I_1 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dt$ aussi, par le théorème de comparaison,.

Pour I_2, au voisinage de 1, on a vu que $-f(t) \sim_1 \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$. Or, par le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ converge et par le théorème des équivalents, $I_2 = \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dt$ aussi.

3) Evident.

4) On prend $x < y \in]0,1[$ et on effectue une intégration par parties en posant $u = \ln t$ et $v' = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$:

$$\int_x^y \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dt = 2\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\ln t\right]_x^y - 2\int_x^y \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}}.$$

On a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\ln x = 0$ et $\lim_{y\to 1} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}\ln y = 0$ et donc $I = -2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}}$.

Par le changement de variables $s = 2t-1$, on obtient alors : $I = -4\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = -2\pi$.

Exercice II - 5 - 5 - 5

1) On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2}$. Donc la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 1.

2) En outre, on a :

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1.$$

Par conséquent, la suite nu_n est croissante, et comme u_n est positive, on a :

$$nu_n \geq u_1 \Rightarrow u_n \geq \frac{u_1}{n}$$

3) La série de terme général u_n est divergente (minorée par une série divergente).

Exercice III - 15

Le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n$$

où $v_n \sim \dfrac{-1}{8n^2}$.

Maintenant, la série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série de terme général v_n, à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann). La série de terme général u_n est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Exercice IV - 5 - 5 - 5

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{t}{t^2+n^\beta} \sim \dfrac{t}{n^\beta}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Par le critère de Riemann, la série de terme général $\dfrac{t}{n^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$. Par comparaison la série de terme général $\dfrac{t}{t^2+n^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$. Donc la série de fonctions de terme général $u_n(t)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ ssi $\beta > 1$.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_n'(t) = \dfrac{(t^2+n^\beta) - t \times 2t}{(t^2+n^\beta)^2} = \dfrac{n^\beta - t^2}{(t^2+n^\beta)^2}$. Donc u_n croît sur $[0, n^{\beta/2}]$ et décroît ensuite. Le maximum, atteint en $n^{\beta/2}$ vaut $\dfrac{n^{\beta/2}}{n^\beta+n^\beta} = \dfrac{1}{2n^{\beta/2}}$.

3) Par définition la série de fonctions de terme général $u_n(t)$ converge normalement $[0, +\infty[$ ssi la série numérique de terme général $\dfrac{1}{2n^{\beta/2}}$ converge. Par le critère de Riemann la condition nécessaire et suffisante est $\beta > 2$.