Analyse complexe
Théorème de Riemann

Élie Goudout

Mai 2012

Table des matières

Introduction

Nous allons ici nous intéresser au comportement des fonctions dérivables au sens de $\mathbb{C}$. Celles-ci sont bien plus spécifiques que les fonctions dérivables réelles mais permettent néanmoins, comme il s'agit de le montrer ici, de mettre en bijection une grande classe d'ouverts de $\mathbb{C}$ avec le disque unité ouvert.

Historique du théorème de Riemann

Le théorème que je vais démontrer a été exposé par Riemann lui-même dans une dissertation pour la première fois en 1854, sous des hypothèses plus fortes : le contour de l'ouvert Ω considéré était supposé C^1_{pm}. La preuve s'appuyait sur une minimisation d'intégrale : le *principe de Dirichlet*. Ce dernier s'est avéré être faux dans la généralité, mais Hilbert parvint à justifier son utilisation sous ces hypothèses. C'est finalement en 1912, grâce à Carathéodory que la première preuve complète et rigoureuse du théorème voit le jour. Puis s'en suivent quelques simplifications : Koebe en 1914 puis F. Riesz et Fejér en 1922.
La preuve a évolué depuis et celle que je présente ici est une des plus courantes et des plus accessibles à ce jour.

Première partie
Fonctions holomorphes, première approche

1 Définitions

Définition 1.1. *Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite* holomorphe *sur un ouvert D du plan complexe si elle y est dérivable en tout point, au sens complexe.*
On note $\mathscr{H}(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert D.

Par exemple, on vérifiera que pour tout $n \in \mathbb{N}, z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $z \mapsto nz^{n-1}$ alors que $z \mapsto \bar{z}$ ne l'est nulle part bien qu'elle soit C^∞ au sens réel

Définition 1.2. *Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite* analytique *sur l'ouvert D de $\mathbb{C}$ si elle est développable en série entière au voisinage de tous les points de D c'est-à-dire si :*

$$\forall z_0 \in D, \exists (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \exists \eta > 0, \forall z \in D(z_0, \eta), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

2 Représentations conformes

Définition 2.1. *On pose $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ de sorte que si f est différentiable :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Proposition 1. *$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est une fonction holomorphe en un point $z = x+iy \in \mathbb{C}$ si et seulement si sa matrice jacobienne en ce point est une matrice de similitude.*

Autre formulation. *Si f est différentiable en $z \in \mathbb{C}$, elle y est holomorphe si et seulement si sa différentielle en ce point est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Preuve : si $h, k \in \mathbb{R}$, on a : $f(x+h+i(y+k)) = f(x+iy) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + o(\sqrt{h^2+k^2}) = f(x+iy) + (h+ik)\frac{\partial f}{\partial x} + k\left(\frac{\partial f}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial x}\right) + o(\sqrt{h^2+k^2})$. Donc f est dérivable en z si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

si et seulement si :

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

qui est bien une matrice de similitude (ce sont les équations dites de Cauchy-Riemann).

Avec les définitions, on peut résumer : f est holomorphe en $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \tag{1}$$

Remarque : Ainsi, une fonction holomorphe en z est à jacobien nul si et seulement si sa dérivée en ce point est nulle. D'où :

Proposition 2. *Une fonction holomorphe en z conserve localement les angles autour de ce point si et seulement si $f'(z) \neq 0$.*

et donc la définition naturelle :

Définition 2.2. *Si D est un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction $f \in \mathscr{H}(D)$ est dite* conforme *en $z \in D$ si $f'(z) \neq 0$. De plus, f est appelée* application conforme *si sa dérivée ne s'annule pas sur D.*

Définition 2.3. *Deux ouverts de $\mathbb{C}$ sont dits* conformément équivalents *s'il existe une application conforme bijective envoyant l'un sur l'autre. C'est une relation d'équivalence.*

3 Holomorphie et analycité

Dans cette section, nous allons établir l'équivalence entre holomorphie et analycité, propriété fondamentale ! Pour la suite, on se donne D un ouvert de $\mathbb{C}$.

3.1 Toute fonction analytique est holomorphe...

Preuve : Soit f une fonction analytique sur D et $z_0 \in D$. On peut supposer sans perdre de généralité que $z_0 = 0$. Montrons alors que f est dérivable au voisinage de 0 au sens complexe. Donnons-nous $\rho > 0$ tel que pour tout z dans $D(0,\rho), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, et $z \in D(0,\rho)$ fixé. Soit alors $\epsilon > 0$ tel que $D(z,\epsilon) \subset D(0,\rho)$. On sait que la série est normalement convergente dans $\overline{D}(z,\epsilon)$ ainsi que la série des termes dérivés

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} z^n$$

Donc notant $z = x+iy$ avec x et y réels, les fonctions définies dans $]-\epsilon;\epsilon[$ par $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t+iy)^n$ et $s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x+is)^n$ sont dérivables en $t = x$ et $s = y$ avec pour dérivées respectives α et $i\alpha$ où

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_{n+1}(x+iy)^n$$

Ainsi un développement limité de f en $x+iy$ donne :

$$\forall (h,k) \in]-\epsilon;\epsilon[^2, f(x+h+i(y+k)) - f(x+iy) = \alpha h + (i\alpha)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

Finalement :

$$\forall \omega \in D(0,\epsilon)\backslash\{0\}, \frac{f(z+\omega) - f(z)}{\omega} = \alpha + o(1)$$

Donc f est dérivable en z avec

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_{n+1}z^n \tag{2}$$

Remarque : Ce résultat peut aussi s'obtenir en travaillant directement avec le taux d'accroissement en utilisant un analogue de la convergence dominée après avoir majoré la valeur absolue de la différence entre le taux d'accroissement et la série dérivée.

3.2 ...et réciproquement

La réciproque étant plus difficile, nous affaiblirons les hypothèses en supposant que f est $\mathbb{C} - C^1$ pour ne pas avoir à utiliser ici la théorie des formes différentielles. Nous travaillerons en 0 sans perte de généralité.

Soit $R > 0$ tel que $D(0,R) \subset D$. Pour $(r,\theta) \in]0;R[\times\mathbb{R}$ on pose :

$$f_r : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto f(re^{i\theta}) \end{pmatrix} \text{ et } f_\theta : \begin{pmatrix}]0;R[\longrightarrow \mathbb{C} \\ r \longmapsto f(re^{i\theta}) \end{pmatrix}$$

Fixons pour le moment $r \in]0,R[$. Par hypothèse, f_r est de classe C^1 et $2\pi-$périodique. Le théorème de Dirichlet nous donne alors $(a_n(r)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f_r(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n(r)e^{in\theta} \text{ et } \sum_{\mathbb{Z}} |a_n(r)| \text{ converge.}$$

Alors par intégration sur le segment $[0,2\pi]$, si $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \tag{3}$$

Mais f_r et f_θ sont C^1 et l'intégration a lieu sur un segment. $a_n(r)$ est donc dérivable et la dérivée s'obtient en dérivant (3) sous le signe intégral :

$$a_n(r)' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}f'(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2i\pi r}\int_0^{2\pi} ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

Donc en intégrant par partie :

$$a_n(r)' = \frac{1}{2i\pi r}\left(\left[f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right)$$

Finalement, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$a_n(r)' = \frac{n}{r}a_n(r) \tag{4}$$

Il existe donc $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}, a_n(r) = c_n r^n$, et ainsi :

$$\forall z \in D(0,R)\backslash 0, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{5}$$

Il nous reste à montrer que les c_n sont nuls pour $n < 0$. Pour cela utilisons directement (3) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in]0,R[,\ c_{-n} = a_{-n}r^n = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

qui tend vers 0 quand $r \underset{r\neq 0}{\longrightarrow} 0$ par continuité de f, bornée sur les compacts de $D(0,R)$.

Remarque : Ce caractère tout à fait particulier des fonctions dérivables dans $\mathbb{C}$ ne se retouve pas chez les fonctions réelles. En effet, avec (2), si f est holomorphe, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Par ailleurs, on vérifiera facilement que la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et égale à $e^{\frac{-1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^+$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses dérivées en nulles en 0. Elle n'est donc pas développable en série entière en 0, ou elle serait nulle sur un voisinage ouvert de 0.

Corollaire 1. *Ainsi, si f est $\mathbb{C}$-dérivable, elle l'est indéfiniment.*

Remarque : Ce n'est pas le cas dans $\mathbb{R}$: cf. $x \mapsto x|x|$ en 0.

3.3 Formules intégrales

Avec les chapitres précédents, en intégrant une somme normalement convergente sur des compacts, on a les formules suivantes :

Proposition 3. *Si $f \in \mathscr{H}(D)$, pour tout $z \in D$, si $\overline{D}(z,r) \subset D$ avec $r > 0$, on a :*

$$\forall z' \in D(z,r), f(z') = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f(u)du}{u - z'} \tag{6}$$

Par ailleurs, par théorème, la dérivée s'obtient en dérivant (6) sous le signe intégral :

Proposition 4. *Avec les mêmes hypothèses :*

$$f'(z') = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f(u)du}{(u - z')^2} \tag{7}$$

Remarque : La démonstration complète et rigoureuse de la section 3.2 consiste à montrer la formule (6) pour une fonction holomorphe et en déduire son analycité en développant $\frac{1}{u-z'}$ en série entière.

Deuxième partie
Outils fondamentaux

4 Structure de $\mathscr{H}$(D)

4.1 Inversions

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{H}(D)$.

Proposition 5. *Le produit et la somme de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe. De plus, si f ne s'annule pas sur D, $\frac{1}{f}$ est bien définie sur D et y est holomorphe.*

Proposition 6. *Si f est bijective de $D \to D'$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur D, f^{-1} est holomorphe sur D'.*

Preuves : Il suffit d'adapter les démonstrations des cas réels par le taux d'accroissement.

4.2 Existence de logarithme

Soit D un ouvert simplement connexe du plan.

On va montrer ici que si $f \in \mathscr{H}(D)$ ne s'annule pas sur D, il existe un logarithme $g \in \mathscr{H}(D)$ tel que $e^g = f$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques propositions :

Proposition 7. *Toute fonction holomorphe admet localement une primitive.*

Preuve : on suppose donnée $f \in \mathscr{H}(D)$. Alors $f(z)dz$ est une forme fermée. En effet, on a vu : $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ où $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy = udx + vdy$. Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Donc $f(z)dz$ est fermée. Soit alors $z \in D$ et $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset D$. D'après le théorème de Poincaré dans un ouvert étoilé, il existe F telle que dans $D(z,r)$:

$$dF = f(z)dz \tag{8}$$

Ainsi, on a $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = f$ et donc le résultat.

Remarque : On retiendra que $f(z)dz$ est fermée.

Proposition 8. *Si ω est une forme différentielle sur D et que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin γ fermé de D et C^1_{pm}, alors ω est exacte.*

Preuve : Posons $\omega = adx + bdy$. Soit $z_0 \in D$. Avec l'hypothèse, $\int_\Gamma \omega$ ne dépend pas de Γ C^1_{pm} joignant z_0 à z dans D. Un tel chemin existe puisque D est un ouvert connexe. Soit alors $F(x,y)$ la valeur commune des $\int_\Gamma \omega$ où Γ joint z_0 à $z = x + iy$.
Pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$F(x+h,y) - F(x,y) = \int_0^1 \omega(z+th).hdt = h\int_0^1 a(z+th)dt = \int_z^{z+h} a(t)dt$$

Finalement, F est dérivable selon x et on a $\frac{\partial F}{\partial x} = a$. De la même façon : $\frac{\partial F}{\partial y} = b$. D'où le résultat.

Proposition 9. *(Admise) Si ω est fermée dans D et que γ_1 et γ_2 sont deux chemins homotopes à extrémités fixes, on a :*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \tag{9}$$

Idée : Ceci s'obtient grâce à l'existence de primitives locales et au *Théorème de Borel-Lebesgue.*

On peut maintenant montrer le

Théorème 1. *Toute fonction f holomorphe sur l'ouvert simplement connexe D et ne s'y annulant pas admet un logarithme holomorphe, c'est-à-dire :*

$$\exists g \in \mathscr{H}(D), \forall z \in D, e^{g(z)} = f(z)$$

Démonstration. Par hypothèse, f ne s'annule pas sur D. Donc avec précédemment, $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur D. Notons alors $\omega = \frac{f'}{f}(z)dz$. Cette forme différentielle est fermée sur D, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 7. Donc avec la proposition 9, pour tout γ fermé et C^1_{pm} dans D, $\int_\gamma \omega = 0$ puisque D est simplement connexe. Donc par la proposition 8, il existe $h \in \mathscr{H}(D)$ telle que :

$$\forall z \in D, h(z)' = \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{10}$$

Ainsi, on a :

$$\left(\frac{e^h}{f}\right)' = \frac{e^h}{f^2}(h'f - f') = 0$$

On a donc pour z dans D : $e^{h(z)} = e^{h(0)-\alpha} f(z)$ où $e^\alpha = f(0)$. Alors $g : z \mapsto h(z) + \alpha - h(0)$ convient et on a bien $g \in \mathscr{H}(D)$. Ceci achève la démonstration.

□

Corollaire 2. *Si $f \in \mathscr{H}(D)$ ne s'annule pas, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f admet une racine p-ième holomorphe.*

Preuve : Si $e^g = f$, la fonction définie par $h = e^{\frac{g}{p}}$ vérifie $h^p = f$ et $h \in \mathscr{H}(D)$.

5 Familles normales

Définition 5.1. *Une partie A de $\mathscr{H}(D)$ est une* famille normale *si de toute suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur tous les compacts de D.*

Nous n'aurons besoin que d'une propriété de ces familles ici :

Théorème 2. *Si $A \subset \mathscr{H}(D)$ a ses éléments uniformément bornés sur tous les compacts de D, alors A est une famille normale.*

Démonstration. On se donne donc $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$. Travaillons d'abord sur un disque compact $K = \overline{D}(z_0, r') \subset \overline{D}(z_0, r) \subset D$ avec $r > r' > 0$ et $z_0 \in D$.

Lemme 1. (f_n) *est équilipschitzienne sur K*

Preuve du lemme 1 : Par hypothèse, il existe M un majorant uniforme du module des f_n sur $\overline{D}(z_0, r)$. Alors avec (7), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in K, |f'(z)| \leq \frac{2\pi(r - r')}{2\pi} \frac{M}{(r - r')^2}.$$

Retour à la preuve : Posons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}^2 \cap K$. Quitte à extraire par le procédé diagonal, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(f_p(a_n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite α_n. Montrons que (f_n) converge uniformément sur K.
Soit $\epsilon > 0$.
Soit, grâce au lemme 1, $\eta > 0$ d'équicontinuité pour ϵ. Soit $B \subset \mathbb{N}$ *finie* telle que : $\forall z \in K, \exists i \in B, |z - a_i| \leq \eta$, qui existe bien ; et $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \forall i \in B; |\alpha_i - f_n(a_i)| \leq \epsilon$. On a alors :

$$\forall m > n \geq N, \forall z \in K, |f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon \leq 3\epsilon$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc le *critère de Cauchy uniforme* sur l'espace complet K. Ainsi, elle y converge uniformément. Pour conclure, il suffit d'appliquer ce que l'on vient de voir aux compacts

$$K_n = \overline{D}(b_n, \frac{d(b_n, \complement_{\mathbb{C}} D)}{2}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

(où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}^2 \cap D$) et d'utiliser le procédé diagonal. En effet, tout compact K de D est inclus dans une union finie de tels compacts. On obtient ainsi une extraction ψ de $\mathbb{N}$ telle que :

$$(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tous les compacts de } D.$$

□

6 Automorphismes du disque

On note U le disque unité ouvert.

6.1 Lemme de Schwarz

Proposition 10. *Si $f \in \mathscr{H}(U)$ vérifie $f(0) = 0$ et $\forall z \in U, |f(z)| < 1$, alors :*

$$\forall z \in U, z \neq 0, |f(z)| \leq |z|$$

De plus, si l'égalité a lieu en un point du disque ou que $f'(0) = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in U, f(z) = \lambda z \text{ et } |\lambda| = 1.$$

Preuve : f étant nulle en 0, $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe sur U. Soit $x \in]0, 1[$. Par hypothèse :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{1}{x}$$

Donc par le *principe du maximum* appliqué à la fonction holomorphe $\frac{f(z)}{z}$, pour tout $u \in U$, on a :

$$\left|\frac{f(ux)}{ux}\right| < \frac{1}{x}$$

Ainsi, quand $x \to 1^-$:

$$\forall u \in U, |f(u)| \leq |u|$$

De plus, si la fonction holomorphe (correctement définie en zéro) $\frac{f(z)}{z}$ atteint effectivement 1 en module en $z_0 \in U$, elle y est constante par un simple développement limité en z_0. Ainsi, pour tout $z \in U$, $\frac{f(z)}{z} = \frac{f(z_0)}{z_0}$ qui est de module 1. D'où le résultat.

6.2 Automorphismes de U

Définition 6.1. *Soit D et D' deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que f est un* isomorphisme *de D dans D' si $f : D \to D'$ est bijective et $f \in \mathscr{H}(D)$.*
C'est un automorphisme *si $D = D'$.*

Définition 6.2. *On dit qu'un groupe T d'isomorphismes de D agit* transitivement sur D *si pour tout couple de points $(z, z') \in D^2$, il existe $f \in T$ telle que $f(z) = z'$.*

Définition 6.3. *Si $a \in D$, on appelle* groupe d'isotropie de a *l'ensemble des automorphismes de D laissant a invariant. On verifie que c'est effectivement un groupe.*

Le but est ici de déterminer les automorphismes du disque unité ouvert U. Montrons d'abord une propriété de nature plus topologique :

Proposition 11. *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et Γ l'ensemble des automorphismes de D. Soit $B \subset \Gamma$ un groupe. Supposons :*
- *B agit transitivement sur D,*
- *B contient le groupe d'isotropie d'un point de D.*

Alors $B = \Gamma$.

Preuve : Soit $z_0 \in D$ dont le groupe d'isotropie est contenu dans D. Soit $f \in \Gamma$ et $a = f(z_0)$. Par transitivité, il existe $g \in B$ telle que : $g(a) = z_0$. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de D et $g \circ f(z_0) = z_0$. Donc par hypothèse, il existe $\varphi \in B$ telle que $g \circ f = \varphi$. Alors $f = g^{-1} \circ \varphi \in B$. D'où $B = \Gamma$.

On peut conclure pour cette partie avec la

Proposition 12. *L'ensemble des automorphismes du disque, noté $\mathcal{S}(U)$ est exactement l'ensemble des*

$$\Phi_{a,\theta} : \begin{pmatrix} U \longrightarrow U \\ z \longmapsto e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{pmatrix}, \text{ pour } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } |a| < 1.$$

Preuve : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$. On a clairement $\Phi_{a,\theta} \in \mathscr{H}(U)$. De plus, si $a \neq 0$, on a pour $z \neq -\frac{1}{\bar{a}}$:

$$\Phi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \left(-\frac{1}{\bar{a}} + \frac{-a + \frac{1}{\bar{a}}}{1 - \bar{a}z} \right)$$

qui est bijective de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même (on ne cherchera pas ici à donner de sens précis à cet ensemble, appelé sphère de Riemann) comme composée d'applications bijectives. Par ailleurs, un simple calcul montre que l'image du cercle unité est lui-même. Ainsi, par un argument de connexité, comme $|a| < 1$, $\Phi_{a,\theta}$ établit une bijection de U sur lui-même. Donc c'est un automorphisme de U. Le même résultat est évident si $a = 0$.
Nous allons maintenant nous servir de la proposition 11. Dans un premier temps, l'ensemble décrit plus haut agit transitivement sur U. En effet, si $(a, b) \in D^2$, $\Phi_{-b,0} \circ \Phi_{a,0}$ est un automorphisme de U et vérifie $\Phi_{-b,0} \circ \Phi_{a,0}(a) = b$. Pour conclure, il nous reste à montrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Le groupe d'isotropie de* 0 *est constitué des rotations du plan, centrées en* 0*.*

Preuve du lemme : Soit f un automorphisme de U avec $f(0) = 0$. Avec le *lemme de Schwarz*, pour tout $z \in U$, on a : $|f(z)| \leq |z|$. Mais de même : $|f^{-1}(z)| \leq |z|$. Donc avec la seconde partie

du *lemme de Schwarz*, f est une rotation autour de 0.
Retour à la preuve : Les $z :\mapsto e^{i\theta}z$ sont dans le groupe décrit plus haut. Donc il contient le groupe d'isotropie de 0. La proposition 11 achève la preuve.

Pour la suite, nous n'aurons besoin que des $\Phi_{a,0}$ que nous noterons alors Φ_a. On vérifie alors que pour tout $|a| < 1$, $\Phi_a^{-1} = \Phi_{-a}$.

Troisième partie

Théorème de Riemann

Le but de cette partie est de montrer le théorème de représentations conformes de Riemann.

Théorème 3. *Étant donné un ouvert Ω non vide de $\mathbb{C}$, il est conformément équivalent au disque unité U si et seulement si :*
- $\Omega \neq \mathbb{C}$,
- Ω *est simplement connexe.*

Les conditions sont facilement nécessaires : la première parce qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante d'après le *théorème de Liouville* ; la seconde par un argument de topologie. Le caractère suffisant demande beaucoup plus de travail, et se fait en trois temps.

Donnons-nous une fois pour toute un ouvert Ω vérifiant les hypothèses du théorème.

Proposition 13. *Montrons d'abord qu'il existe un fonction holomorphe injective qui envoie Ω dans U.*

Preuve : Par hypothèse, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $b \notin \Omega$. Alors $g : z \mapsto z - b$ est holomorphe sur Ω et ne s'y annule pas. Elle admet donc une racine holomorphe dans Ω simplement connexe, soit f. Montrons que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$.
Soit $z_0 \in \Omega$ fixé et $\alpha = f(z_0)$. Alors $-\alpha \notin \overline{f(\Omega)}$.
En effet : Procédons par l'absurde en se donnant $(z_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = -\alpha$. Alors $(f(z_n)^2)_{n\in\mathbb{N}} = (g(z_n))_{n\in\mathbb{N}} = (z_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha^2 = g(z_0) = z_0 - b$. Donc $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$, ce qui, par continuité de f, entraine $\alpha = 0$. C'est absurde par définition de g. Finalement, la fonction suivante convient :

$$\varphi : \begin{pmatrix} \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{\lambda}{f(z)+\alpha} \end{pmatrix}, \text{ pour } \lambda \text{ assez petit,}$$

et on peut imposer à une telle fonction de s'annuler en un point quelconque de Ω en composant par un automorphisme de U.

Donnons-nous aussi pour la suite $a \in \Omega$ et notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives de Ω dans U et s'annulant en a. C'est une partie non vide de $\mathscr{H}(\Omega)$ avec ce qui précède.
La suite repose sur une propriété d'extremum :

Proposition 14. *Soit $f \in \mathcal{A}$. Si $f(\Omega) \subsetneq U$, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ telle que $|\tilde{f}'(a)| > |f'(a)|$.*

Preuve : Par hypothèse, il existe $b \in U \backslash f(\Omega)$. On pose $g = \Phi_b \circ f$, qui est injective et ne s'annule pas dans Ω. Elle admet donc une racine holomorphe dans Ω simplement connexe, soit r. On a évidement $r(\Omega) \subset U$. Enfin, notons $\tilde{f} = \Phi_{r(a)} \circ r$. Vérifions qu'elle convient :
On a $\tilde{f}(a) = 0$ donc $\tilde{f} \in \mathcal{A}$. Notons $\pi : \ z \mapsto z^2$. On a alors :

$$f = h \circ \tilde{f} \text{ où } h = \Phi_{-b} \circ \pi \circ \Phi_{-r(a)} \tag{11}$$

Mais $f(a) = \tilde{f}(a) = 0$. Donc $h(0) = 0$ et par définition, $h(\Omega) \subset U$. Donc par le *lemme de Schwarz*, $|h'(0)| \leq 1$. Par ailleurs, $\pi \circ \Phi_{-r(a)}$ n'est pas injective dans U, donc ce n'est pas une rotation. Ainsi, par contraposée de la seconde partie du *lemme de Schwarz*, on a : $|h'(0)| < 1$.
Finalement :

$$|f'(a)| = |\tilde{f}'(a)||h'(f(a))| < |\tilde{f}'(a)|.$$

D'où le résultat.

Pour conclure, il reste à montrer :

Proposition 15. *$sup\{|f'(a)|, f \in \mathcal{A}\}$ est atteint dans $\mathcal{A}$.*

Preuve : Soit $(f_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(a) = \sup\{|f'(a)|, f \in \mathcal{A}\} = \alpha$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n(\Omega) \subset U$. Donc par le théorème 2, quitte à extraire, on peut supposer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous les compacts de Ω, mettons vers f.
La convergence étant uniforme sur les compacts, on peut passer à la limite dans (6) par *convergence dominée*. Ainsi, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ et $f(a) = 0$.
Par construction, $f(\Omega) \subset \bar{U}$. Mais $|f'(a)| \neq 0$ donc f n'est pas constante. Ainsi, par un développement limité du développement analytique de f en tout point, on a $f(\Omega) \subset U$.
Reste à montrer l'injectivité de f. Procédons par l'absurde.
Soient alors $z, z' \in \Omega$ tels que $z \neq z'$ et $f(z) = f(z')$. Les zéros de f étant isolés, il existe $r > 0$ tel que $w \ \mapsto f(w) - f(z)$ ne s'annule pas sur $\overline{D}(z', r) \backslash \{z'\} \subset \Omega$. dans un premier temps, si $n \in \mathbb{N}$, par injectivité de f_n, grâce à la propriété admise plus tôt :

$$\int_{C(z',r)} \frac{f_n'(u)du}{f_n(u) - f_n(z)} = 0 \tag{12}$$

Par ailleurs, $w \ \mapsto f(w) - f(z)$ ne s'annule pas sur $C(z', r)$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $\overline{D}(z', r)$. De plus, avec (7), il en va de même de la suite des dérivées. Alors $\left(\frac{f_n'}{f_n - f_n(z)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{f'}{f - f(z)}$ sur $C(z', r)$. Donc on peut passer à la limite dans (12) et :

$$\int_{C(z',r)} \frac{f'(u)du}{f(u) - f(z)} = 0 \tag{13}$$

Estimons différemment cette intégrale. f n'est pas constante, donc par connexité il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour u assez proche de z' :

$$f(u) = f(z') + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (u - z')^n \text{ avec } a_p \neq 0.$$

On a alors :

$$\int_{C(z',r)} \frac{f'(u)du}{f(u)-f(z)} = i\int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta})^{p-1}(pa_p + o_{r\to 0}(1))re^{i\theta}d\theta}{(rei\theta)^p(a_p + o_{r\to 0}(1))} = i\int_0^{2\pi} \frac{(pa_p + o_{r\to 0}(1))d\theta}{(a_p + o_{r\to 0}(1))}$$

dont la valeur tend vers $2i\pi p$ quand $r \to 0$. On peut donc supposer $r > 0$ assez petit pour que l'intégrale soit non nulle (en fait, quel que soit $r > 0$ assez petit l'intégrale vaut exactement $2i\pi p$). Alors le raisonnement précédent étant toujours valable, on a une contradiction avec (13). C'est absurde.
Finalement, f est injective. Donc $f \in \mathcal{A}$. Donc par contraposée de la proposition 14, on a prouvé qu'il existait effectivement une bijection holomorphe entre Ω et U.

Enfin, vérifions que f est effectivement une représentation conforme grâce à cette

Proposition 16. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f \in \mathscr{H}(D)$ n'est pas injective au voisinage d'un point où sa dérivée s'annule.*

Preuve : Le cas où f est constante est trivial. Sinon, soit $z_0 \in D$ tel que $f'(z_0) = 0$. Supposons, pour simplifier l'écriture que $z_0 = 0$. Quitte à multiplier par une constante non nulle, on peut supposer qu'il existe une fonction holomorphe g et $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ tels que :

$$\forall z \in D, f(z) = z^p(1 + g(z)) \text{ où } g(0) = 0.$$

Donc $1 + g$ admet localement un racine p-ième, soit h. Donc pour z proche de 0,

$$f(z) = a(z)^p \text{ avec } a(z) = zh(z). \tag{14}$$

Mais $a'(0) = h(0) + 0 \neq 0$. Donc a est localement bijective (par l'inversion locale). Donc pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe p nombres dont les images respectives par a sont $\epsilon, \epsilon e^{\frac{2i\pi}{p}}, ..., \epsilon e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}$.
Conclusion : Au voisinage de 0, f prend p fois chaque valeurs.

Donc la fonction f de la proposition précédente est bel et bien une application conforme.
D'où le Théorème !

□

Généralisations

Une première généralisation est le *théorème de Carathéodory*, prouvé par ce dernier : Si l'ouvert Ω est borné et que son contour vérifie une certaine hypothèse (si c'est une courbe de Jordan), l'application conforme trouvée par le *théorème de Riemann* se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur le disque unité fermé (voir [3]).

Il existe aussi une généralisation concernant une autre classe d'ouverts : c'est le *théorème de Tsuji*. Il implique entre autres que 2 couronnes sont conformément équivalentes si et seulement si leur rapport $\frac{\text{diamètre extérieur}}{\text{diamètre intérieur}}$ est le même (voir [3]).

Ce théorème (Riemann) est un cas particulier du *théorème d'uniformisation de Riemann*, qui classe les surfaces de Riemann simplement connexes en trois catégories.

Enfin, le *théorème de Riemann* est existentiel, et non constructif. Il existe cependant des méthodes pour expliciter de telles applications : voir *transformations de Schwarz-Christofell* dans [4].

Références

[1] Amar & Mathéron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.

[2] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Edition Hermann, 1978.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Edition Dunod, 1987, troisième édition.

[4] John W. Dettman. *Applied Complex Variables.* Dover, 1984.