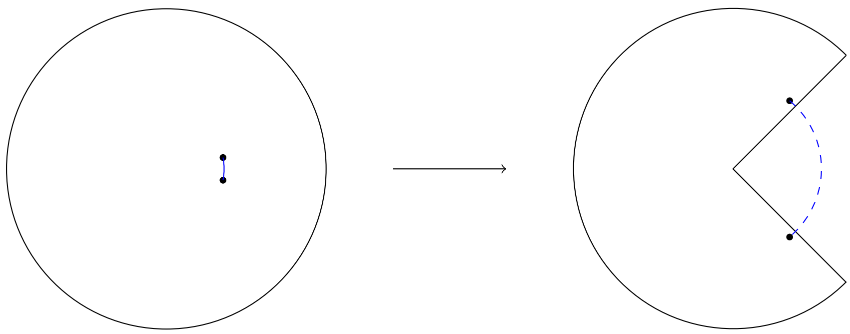
FILTRES, STRUCTURE UNIFORME ET TOPOLOGIE

Seirios

Table des matières

Introduction

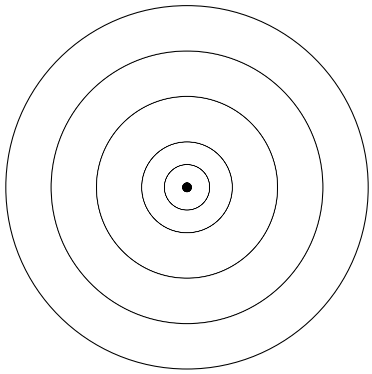
Le maître mot de la topologie est *continuité*, la topologie est l'étude des transformations continues d'un espace. La première question à se poser est de savoir comment formaliser cette notion de continuité. Un synonyme pourrait être *sans déchirure*. Or qu'est-ce qu'une déchirure ? C'est une transformation qui éloigne signicativement deux points initialement proches, comme l'illustre la figure suivante :



Une transformation continue serait donc une transformation envoyant deux points proches sur deux points proches, et l'on est ainsi ramené à définir la notion de *proximité*. Intuitivement, la notion de *proximité* et proche de celle de *distance*, mais d'une certaine manière la distance traite tous les points de la même manière, si bien que l'on ne pourra pas faire varier la notion de proximité dans l'espace, au gré de nos envies. Gardons donc une certaine liberté et définissons la proximité indépendamment de la notion de distance.

Pour cela, nous allons définir un ensemble de *voisinages* $\mathcal{V}(x)$ pour tout point x de l'espace, c'est-à-dire un ensemble de parties V contenant x et nous dirons qu'un second point y est V-proches de x si $y \in V$. Toutefois, il nous faut demander certaines contraintes sur $\mathcal{V}(x)$, pour obtenir une *structure* consistante. Tout d'abord, nous demandons que l'ensemble des voisinages soit non vide, sans quoi nous n'aurions rien apporter ; ensuite, nous demandons à $\mathcal{V}(x)$ d'être stable par intersection finie, ce qui nous permet de dire que si y est à la fois U-proche et V-proche de x, alors il est également $U \cap V$-proche de x, ie. que l'on raffine la proximité de y à x ; enfin, nous demandons à ce que toute partie contenant un voisinage de x soit un voisinage de x, ce qui nous permet de dire que si y est U-proche de x, alors il est également V-proche de x pour tout $V \supset U$.

Les propriétés que nous venons d'évoquer font de l'ensemble des voisinages un *filtre*. Nous passerons le premier chapitre à approfondir cette notion, mais une première remarque est que l'ensemble des voisinages n'est pas commode à manipuler, parce qu'il contient beaucoup d'éléments. Pour remédier à cela, nous montrerons que l'on peut extraire l'information du filtre des voisinages d'un point par une *base fondamentale de voisinages* $\mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$, de telle sorte qu'une partie est un voisinage de x si, et seulement si, elle contient un élément de la base $\mathfrak{B}(x)$ de $\mathcal{V}(x)$. C'est la notion de base fondamentale de voisinages qui sera la plus intuitive et la plus maniable ; par exemple, dans le plan, une base fondamentale de voisinages d'un point peut être l'ensemble des boules centrées sur ce point :



Usuellement, l'on ordonne l'ensemble des filtres sur notre espace par l'inclusion et un filtre $\mathfrak{F}_1$ est dit plus fin qu'un second filtre $\mathfrak{F}_2$ si $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. En particulier, on remarque que si un filtre $\mathfrak{F}$ est plus fin que le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages d'un point x, alors pour tout voisinage V de x, $\mathfrak{F}$ contient une partie dont tous les éléments sont V-proches de x ; c'est pourquoi on dit que $\mathfrak{F}$ *converge* vers x. Dès lors, la topologie de notre espace est entièrement déterminée par la donnée des filtres convergents, aussi pourrons-nous caractériser cette topologie en terme de convergence de filtres, ce qui n'est pas sans rappeler la convergence des suites dans les espaces métriques [1].

Dans ce contexte de voisinages, une transformation f sera continue si pour tout point x et pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que tout élément U-proche de x est envoyé sur un élément V-proche de $f(x)$ [2].

Nous ferons le lien entre cette vision de la topologie et la présentation usuelle que l'on en fait au chapitre 2, puis l'on formulera et démontrera les résultats classiques de topologie en termes de filtres aux chapitres 2 et 3.

Tout comme dans le cas métrique, il n'est néanmoins pas toujours facile de montrer qu'un filtre est convergent. Une solution est, toujours dans le cas métrique, d'introduire la notion de *suite de Cauchy* et de *complétude*. Nous allons suivre cet exemple en termes de filtres. Pour cela, il nous faut étendre notre notion de *proximité* définit plus haut au cas où aucun point n'est préalablement fixé. En partant de l'idée que deux points x et y sont proches si, et seulement si, (x, y) est proche de la diagonale Δ du produit cartésien, on se donne un filtre de voisinages $\mathcal{U}$ de Δ et si $U \in \mathcal{U}$ on dit que x et y

1. Précisément, une suite converge dans notre espace si, et seulement si, le filtre engendré par les parties contenant tous les termes de la suite sauf un nombre fini, converge également.

2. D'un point de vue technique, l'ensemble des couples (X, π) où X est un ensemble et π une application associant à tout $x \in X$ un filtre basé en x définit une catégorie pour les applications dont les images réciproques de voisinages sont des voisinages qui est équivalente à la catégorie des espaces topologiques pour les fonctions continues définie usuellement.

sont proches d'ordre U si $(x,y) \in U$. Pour imposer à la relation que l'on construit d'être symétrique, on demande également à $\mathcal{U}$ d'être stable par symétrie par rapport à Δ ; de plus, on souhaite qu'il existe des éléments de $\mathcal{U}$ arbitrairement rappochés autour de Δ, aussi impose-t-on également la condition suivante : pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathcal{U}$ tel que $\overset{2}{W} \subset V$, en notant $\overset{2}{W} = \{(x,y) | \exists z, (x,z), (z,y) \in W\}$[3]. Sous ces conditions, on dit que $\mathcal{U}$ est une *structure uniforme* de notre espace et les éléments de $\mathcal{U}$ sont des *entourages*.

Une fois que l'on s'est donné une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur notre espace, on dira alors qu'un filtre $\mathfrak{F}$ est *de Cauchy* si pour tout entourage V, $\mathfrak{F}$ contient une partie petite d'ordre V ie. dont les éléments sont tous proches d'ordre V. Ensuite, on peut vérifier que tout filtre convergent est un filtre de Cauchy et alors on définira un espace uniforme *complet* comme un espace uniforme dont tous les filtres de Cauchy convergeront.

Nous parlerons de l'existence et des propriétés des structures uniformes au chapitre 4, puis nous nous intéresserons à la notion de complétude au chapitre 6. Finalement, nous vérifierons au chapitre 7 que les résultats que nous aurons obtenus s'identifient aux résultats usuels dans le cas des espaces métriques.

Durant notre étude, nous pourrons constater la grande similarité entre les rôles des filtres dans les espaces topologiques et les suites dans les espaces métriques, c'est pourquoi les filtres sont considérés comme une généralisation des suites dans le cadre topologique. Il existe néanmoins d'autres manières, peut-être plus naturelles, d'étendre la notion de suite. Ce sera l'objet de notre dernier chapitre : nous introduirons la notion de *net* et nous montrerons que ce formalisme est équivalent à celui des filtres.

3. Dans le cadre métrique, cette condition implique, pour tout $r > 0$, l'existe d'une boule de rayon $r/2$.

Chapitre 1

Ensembles filtrés

Dans ce chapitre, on fixe un ensemble X. Commençons par définir l'objet principal de ce document :

Définition 1.1 : Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble non vide de parties de X. On dit que $\mathfrak{F}$ est un *filtre* sur X si :
(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
(ii) Pour tout $F \subset X$, s'il existe $\Omega \in \mathfrak{F}$ tel que $\Omega \subset F$, alors $F \in \mathfrak{F}$.
(iii) Toute intersection finie d'éléments de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

On dit alors que $(X, \mathfrak{F})$ est un *ensemble filtré*.

Exercice 1.2 : Démontrer que les ensembles suivants forment un filtre sur X : l'ensemble des voisinages d'une partie non vide de X, l'ensemble des parties de X contenant une partie non vide $A \subset X$.

Ensuite, on définit sur l'ensemble des filtres sur X une relation d'ordre :

Définition 1.3 : Soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux filtres sur X. On dit que $\mathfrak{F}_1$ est *plus fin* que $\mathfrak{F}_2$ si $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$.

Exercice 1.4 : Montrer qu'il s'agit bien un ordre, et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit total.

En guise de premiers exemples de filtres, considérons la propriété suivante :

Propriété 1.5 : Pour toute partie non vide $A \subset X$, il existe un plus petit filtre contenant A. On dit que A *engendre* ce filtre.

Preuve : Montrons que $\mathfrak{F} = \{F \subset X \mid A \subset F\}$ est le plus petit filtre contenant A. Remarquons d'abord que $X \in \mathfrak{F}$ puisque $A \subset X$ et $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ puisque tout élément de $\mathfrak{F}$ contient A qui est non vide. Ensuite, soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$; alors $\left\{ \begin{array}{l} A \subset F_1 \\ A \subset F_2 \end{array} \right.$, d'où $A \subset F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$. Ainsi, $\mathfrak{F}$ est stable par intersection finie. Soient $F \in \mathfrak{F}$ et $G \subset X$ tel que $F \subset G$. Alors $A \subset F \subset G$, donc $G \in \mathfrak{F}$. Par conséquent, $\mathfrak{F}$ est bien un filtre.

Soit $\mathfrak{F}'$ un second filtre contenant A. Alors par définition, toute partie contenant A appartient à $\mathfrak{F}'$, donc $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ ce qui achève la démonstration. $\square$

En général, un filtre contient un grand nombre d'éléments, si bien qu'il est difficilement manipulable. Il est en fait possible d'en extraire une partie sans perdre d'information :

Définition 1.6 : Soit $\mathfrak{B}$ un ensemble de parties de X. On dit que $\mathfrak{B}$ est une *base de filtre* si :
(i) $\mathfrak{B}$ n'est pas vide et $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,
(ii) L'intersection de deux éléments de $\mathfrak{B}$ contient un élément de $\mathfrak{B}$.

Propriété 1.7 : Soient $\mathfrak{B}$ un ensemble de parties de X. Alors $\mathfrak{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathfrak{B}, B \subset F\}$ est un filtre si, et seulement si, $\mathfrak{B}$ est une base de filtre. Dans ce cas, on dit que $\mathfrak{B}$ *engendre* $\mathfrak{F}$ ou que $\mathfrak{B}$ est une *base du filtre* $\mathfrak{F}$.

Preuve : Si $\mathfrak{B} = \emptyset$, alors $\mathfrak{F} = \emptyset$. Supposons donc $\mathfrak{B} \neq \emptyset$.

Remarquons que, indépendamment de $\mathfrak{B}$, $X \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ vérifie la deuxième propriété de la définition d'un filtre. Donc $\mathfrak{F}$ est un filtre sur X si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \mathfrak{F} \\ \forall F_1, F_2 \in \mathfrak{F}, F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F} \end{array} \right.$.

Or $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ équivaut à $\emptyset \notin \mathfrak{B}$. Supposons que $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, \exists B_3 \in \mathfrak{B}, B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$. Il existe $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tels que $B_1 \subset F_1$ et $B_2 \subset F_2$, d'où $B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$. Or par hypothèse, il exste $B_3 \in \mathfrak{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ d'où $B_3 \subset F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$. La réciproque est claire en posant $F_1 = B_1$ et $F_2 = B_2$.

Finalement, $\mathfrak{F}$ est un filtre si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \mathfrak{B} \\ \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, \exists B_3 \in \mathfrak{B}, B_3 \subset B_1 \cap B_2 \end{array} \right.$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathfrak{B}$ est une base de filtre. □

La propriété suivante donne une structure canonique d'ensemble filtré à certains sous-ensembles d'un espace filtré :

Propriété 1.8 : Soient $\mathfrak{F}$ un filtre sur X, et $A \subset X$. Alors $\mathfrak{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathfrak{F}\}$ définit un filtre sur A si, et seulement si, pour tout $F \in \mathfrak{F}$, $F \cap A \neq \emptyset$. On dit alors que $\mathfrak{F}$ *induit* le filtre $\mathfrak{F}_A$ sur A.

Preuve : Remarquons que, indépendamment de A, $\mathfrak{F}_A$ vérifie les deux dernières propriétés de la définition d'un filtre. En effet, soit $G \subset A$ tel qu'il existe $F \cap A \in \mathfrak{F}_A$ contenu dans G. Alors $F \subset (F \cap A) \cup (X \backslash A) \subset G \cup (X \backslash A)$, donc $G \cup (X \backslash A) \in \mathfrak{F}$ et $G = (G \cup (X \backslash A)) \cap A \in \mathfrak{F}_A$. Ensuite, $A \in \mathfrak{F}_A$ et pour tout $F, G \in \mathfrak{F}_A$, $F \cap G \in \mathfrak{F}_A$.
Ainsi, $\mathfrak{F}_A$ est un filtre sur A si, et seulement si, $\emptyset \notin \mathfrak{F}_A$ ce qui équivaut à : $\forall F \in \mathfrak{F}$, $F \cap A \neq \emptyset$. □

Nous avons précédemment ordonné l'ensemble des filtres sur X ; il se trouve que les éléments maximaux sont très utiles :

Définition 1.9 : Un *ultrafiltre* sur X est un élément maximal de l'ensemble ordonné des filtres sur X.

Exercice 1.10 : Montrer que le filtre engendré par un singleton est un ultrafiltre.

Un tel ultrafiltre, engrendré par un singleton, est dit *principal* ; dans le cas contraire, il est dit *non principal.* L'existence d'ultrafiltres non principaux est donnée par la propriété suivante [1] :

1. La preuve que nous donnons utilise le théorème de Zorn, ie. l'axiome du choix mais l'existence d'ultrafiltres non principaux n'est pas équivalente à l'axiome du choix, aussi parle-t-on parfois de *lemme de l'ultrafiltre* pour désigner cette existence.

Propriété 1.11 : Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur X. Alors il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{F}$.

Preuve : Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que l'ensemble des filtres sur X est inductif et d'appliquer le théorème de Zorn. Soit $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ une chaîne de filtres. Montrons que $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ est un filtre. D'abord, on a $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ et $X \in \mathfrak{F}$. Soit $A \subset X$ tel qu'il existe $B \in \mathfrak{F}$ tel que $B \subset A$. Alors il existe $k \in I$ tel que $B \in \mathfrak{F}_k$ et $A \in \mathfrak{F}_k$, d'où $A \in \mathfrak{F}$.

Soient $F, G \in \mathfrak{F}$. Il existe donc $i, j \in I$ tels que $F \in \mathfrak{F}_i$ et $G \in \mathfrak{F}_j$. Ces deux filtres appartenant à une même chaîne, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_j$. Alors $F, G \in \mathfrak{F}_j$, donc $F \cap G \in \mathfrak{F}_j$ et $F \cap G \in \mathfrak{F}$.

Par conséquent, $\mathfrak{F}$ est bien un filtre. De plus, il majore la chaîne par construction. On en déduit que l'ensemble des filtres sur X est inductif, ce qui achève la démonstration. $\square$

Il n'est pas aisé de montrer qu'un filtre est un ultrafiltre en utilisant uniquement la définition d'ultrafiltre. L'on dispose en fait d'un critère assez maniable :

Propriété 1.12 : Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur X. Si $A \cup B \in \mathfrak{U}$, alors $A \in \mathfrak{U}$ ou $B \in \mathfrak{U}$.

Preuve : Supposons par l'absurde que $A \cup B \in \mathfrak{U}$ et $A, B \notin \mathfrak{U}$. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties $M \subset X$ telles que $M \cup A \in \mathfrak{U}$. Montrons que $\mathfrak{S}$ est un filtre.

D'abord, $\emptyset \notin \mathfrak{S}$ puisque $A \notin \mathfrak{U}$, et $X \in \mathfrak{S}$. Soit $F \subset X$ tel qu'il existe $M \subset X$ tel que $M \subset F$. Alors $A \subset F \supset A \cup M \in \mathfrak{U}$, donc $A \cup F \in \mathfrak{U}$ et $F \in \mathfrak{S}$.

Soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{S}$, et $M_1, M_2 \subset X$ tels que $F_1 \cup M_1, F_2 \cup M_2 \in \mathfrak{U}$. Alors $A \cup (F_1 \cap F_2) \supset A \cup (M_1 \cap M_2) = (A \cup M_1) \cap (A \cup M_2) \in \mathfrak{U}$, donc $A \cup (F_1 \cap F_2) \in \mathfrak{U}$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{S}$.

Ainsi, $\mathfrak{S}$ est bien un filtre. De plus, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$ et $B \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{S}$ est un filtre strictement plus fin que $\mathfrak{U}$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre, d'où la conclusion. $\square$

Propriété 1.13 : Soit $\mathfrak{S}$ un filtre sur X. Alors $\mathfrak{S}$ est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout $A \subset X$, $A \in \mathfrak{S}$ ou $X \backslash A \in \mathfrak{S}$.

Preuve : L'implication est une conséquent de la propriété 1.11. Supposons donc que pour tout $A \subset X$, $A \in \mathfrak{S}$ ou $X \backslash A \in \mathfrak{S}$. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{S}$ (qui existe d'après la propriété 9). Si $Y \in \mathfrak{U}$, alors $X \backslash Y \notin \mathfrak{U}$, d'où $X \backslash Y \notin \mathfrak{S}$, donc par notre hypothèse $Y \in \mathfrak{S}$. Ainsi, $\mathfrak{S}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$ ce qui implique $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$. Par conséquent, $\mathfrak{S}$ est un ultrafiltre, ce qui achève la démonstration. $\square$

Exercice 1.14 : Montrer que dans cette proposition, le *ou* est nécessairement exclusif.

Terminons ce chapitre par la propriété suivante, qui permet notamment de définir le filtre associé à une suite qui sera introduit à l'exercice 5.

Propriété 1.15 : Soient X' un second ensemble, une base de filtre (resp. d'ultrafiltre) $\mathfrak{B}$ sur X et une application $f : X \to X'$. Alors $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre (resp. d'ultrafiltre) sur X'.

Preuve : Puisque $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, $f(\mathfrak{B}) \neq \emptyset$ et puisque $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, $\emptyset \notin f(\mathfrak{B})$. Soient $f(B_1), f(B_2) \in f(\mathfrak{B})$. Alors $f(B_1) \cap f(B_2) \supset f(B_1 \cap B_2)$, or il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset B_1 \cap B_2$, d'où

$f(B) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$. Ainsi, $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre de X'.
Supposons que $\mathfrak{B}$ soit une base d'ultrafiltre. Notons $\mathfrak{U}$ l'ultrafiltre sur X engendré par $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{G}$ le filtre sur X' engendré par $f(\mathfrak{B})$. Soit $A \subset X'$. Alors $f^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$ ou $f^{-1}(X' \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$. Donc il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset f^{-1}(A)$ ou $B \subset f^{-1}(X' \backslash A)$. Ainsi, $f(B) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$ ou $f(B) \subset f(f^{-1}(X \backslash A)) \subset X \backslash A$, c'est-à-dire que $A \in \mathfrak{G}$ ou $X \backslash A \in \mathfrak{G}$, ce qui montre que $\mathfrak{G}$ est un ultrafiltre.

Exercice 1.16 : Donner une condition nécessaire et sufissante pour qu'il en soit de même avec l'image réciproque $f^{-1}(\mathfrak{B})$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les filtres sur un ensemble fini. Lesquels sont des ultrafiltres ?

Exercice 2 : Montrer que l'intersection des ensembles d'un ultrafiltre contient au plus un point. Si elle est réduite à un point, l'ultrafiltre est formé des ensembles contenant ce point.

Exercice 3 : Soient X un ensemble et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur X. Montrer que $\mathfrak{U}$ contient le *filtre de Fréchet* (ie. le filtre formé des parties cofinies) ou est principal.

Exercice 4 : Montrer que si $A \subset X$ n'appartient pas à un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur X, alors la trace de cet ultrafiltre sur A correspond à l'ensemble des parties de A.

Exercice 5 : Soit X un ensemble infini. On définit sur $\mathbb{N}$ le filtre dit *de Fréchet* formé des parties cofinies, puis associe à toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ le filtre engendré par l'image du filtre de Fréchet par l'application $n \mapsto x_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour ce filtre soit un ultrafiltre.

Exercice 6 : Soit $(X_i, \mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles filtrés. Soit, pour tout $i \in I$, $\mathfrak{B}_i$ une base du filtre $\mathfrak{F}_i$. Notons $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ et $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de X de la forme $\prod\limits_{i\in I} M_i$ avec $M_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indice où $M_i \in \mathfrak{B}_i$. Montrer que $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur X. Que dire si $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ est une famille de bases d'ultrafiltre ?
Vérifier que le filtre ainsi construit est le moins fin tel que pour tout $i \in I$, la projection de celui-ci sur X_i corresponde à $\mathfrak{F}_i$.

Exercice 7 : Soit X un ensemble. Notons Φ l'application qui à un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ fait correspondre $\omega : \mathfrak{P}(X) \to \{0,1\}$ définie par $\omega(Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } Y \in \mathfrak{U} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ pour tout $Y \subset X$. Montrer que Φ définit une bijection entre l'ensemble des ultrafiltres sur X et l'ensemble des mesures de probabilité finiment additives sur X.

Corrections des exercices

Chapitre 1

Exercice 1 :

Exercice 2 :

Exercice 3 :

Exercice 4 :

Exercice 5 :

Exercice 6 :

Exercice 7 :