

Traversée d'un pont
Problème d'optimisation

Problème:

4 voyageurs V1 V2 V3 V4 doivent traverser un pont le plus rapidement possible.

V1 le fait en 1 min,

V2 : 2 min

V3 : 5 min

V4 : 10 min

Le pont ne peut supporter que deux personnes maxi.

Il fait nuit. Il faut une lampe pour traverser. Ils en ont qu'une. Elle doit donc être ramenée par quelqu'un pour que d'autres puissent traverser.

Quel doit être l'organisation de la traversée ?

> Vous devez trouver un temps de 17 min.

En 19 min :

V1+V2 =>

V1<=

V1+V3=>

V1<=

V1+V4=>

En 17 min :

V1+V2=>

V1<=

V3+V4=>

V2<=

V1+V2=>

Il existe d'autres variantes du problème avec plus de voyageurs.

Montrons que la solution en 17 min est la solution optimale.

1/ dans le problème ; on a 4 voyageurs, soit 5 traversées (car ils passent 2 par 2, puis un qui ramène)

Dans le cas général, on a pour n voyageurs, n-1 voyages aller et n-2 retours.

Donc $2n-3$ voyages.

2/ V4 est le plus lent, il faut au moins le faire traverser une fois, soit 10 min.

3/ si V3 ne traverse pas avec V4, on aura une durée de 10+5 min. Ajoutons a cela au moins 3 min pour les autres voyageurs, ce qui dépasse 17 min. Donc, V3 doit traverser avec V4

4/ si V3 traverse avec V4, on a quatre traversées possible pour une durée inférieure ou égale à 17 min.

- 1) 10 +1+1+1+1
- 2) 10+1+1+1+2
- 3) 10+2+2+1+1
- 4) 1+2+2+2+1

- 1) impossible car V2 ne traverse pas. (il traverse en 2 min).
- 2) impossible car V1 traverse 3 fois, donc que 3 voyageurs de l'autre coté du pont. (il manque V3)
- 3) impossible car v2 traverse 2 fois, bref, il n'est pas du bon coté
- 4) ça fonctionne !!!! puisque c'est la solution 17 min.

Cette solution est optimale.

La solution générale, sans démonstration :

Tous les voyageurs qui on besoin d'un temps t_i supérieur à $2t_2 - t_1$ doivent traverser 2 par 2 après que V1+V2

V1+V2=>
V2<=
Vi+Vj=>
V1<=

Les groupes doivent se faire comme cela : les deux plus lents en 1^{er}, puis les deux plus lents restants... tant qu'il reste deux voyageurs dont la durée est supérieur à $2t_2 - t_1$
Ensuite, on traverse selon le schéma :

V1+Vj=>
V1<=

On observe ainsi que le premier schéma est celui que l'on a trouvé lors d'une optimisation à 17 min.

Le second correspond au trajet 19 min de l'exemple.

