BAC 1 Examen de Mathématique 29/05/07

Solutions

QUESTION I

2. $T(x,t) = T_0\, e^{-\lambda x} \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$

a) Période de $T(x,t) = \dfrac{2\pi}{\pi/12} = 24$ (heures)

b) $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -\lambda T_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right) - \lambda T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$

= taux de variation de la température à l'heure t en fonction de la profondeur x

$\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\pi}{12} T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$

= taux de variation de la température à la profondeur x en fonction du temps

c) $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda^2 T_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right) + \lambda^2 T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$
$+ \lambda^2 T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right) - \lambda^2 T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$

$= 2\lambda^2 T_0 e^{-\lambda x} \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \lambda x\right)$

De là,
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\pi}{12}\,\frac{1}{2\lambda^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\pi}{24\lambda^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \left(\Rightarrow k = \frac{\pi}{24\lambda^2}\right)$$

d) $T_\ell(x,t) \simeq T(0,6) + x\,\dfrac{\partial T}{\partial x}(0,6) + (t-6)\,\dfrac{\partial T}{\partial t}(0,6)$

$\simeq T_0 - \lambda T_0 x$

La température à une profondeur de 10 cm ($=0{,}1$ m) et à 6h15 ($=6{,}25$ h) est approximativement égale à
$$T_\ell(0{,}1;\,6{,}25) = T_0 - \lambda T_0\, 0{,}1 = T_0\left(1 - \frac{\lambda}{10}\right).$$

---

3. Extrema de
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8$$

a) Points stationnaires

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) Nature des points stationnaires

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{(0,0)}$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 = 0 \iff \lambda = -4 \text{ ou } \lambda = 4$

$Hf(0,0)$ indéfinie $\Rightarrow$ $(0,0)$ est un point de selle

$\boxed{(1,1)}$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 \\ -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)^2 - 16 = (12-\lambda-4)(12-\lambda+4)$

$= (8-\lambda)(16-\lambda) = 0 \iff \lambda = 8 \text{ ou } \lambda = 16$

$Hf(1,1)$ définie positive $\Rightarrow$ $(1,1)$ est un minimum

$\boxed{(-1,-1)}$

$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \left(= Hf(1,1) \right)$$

$Hf(-1,-1)$ définie positive $\Rightarrow$ $(-1,-1)$ est un minimum

QUESTION II

1. $x^2y' + y = 1 \quad (x>0)$ (équation linéaire en y, y')

EH $\quad x^2y'+y=0 \iff \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^2} \iff \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2}$ $\begin{pmatrix} \text{si } y \neq 0 \\ y=0 \text{ sol} \end{pmatrix}$

$\iff \ln|y| = \dfrac{1}{x} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$

$\iff |y| = e^{C_1} e^{\frac{1}{x}} = C_2 e^{\frac{1}{x}} \quad (C_2 > 0)$

$\iff y = \pm C_2 e^{\frac{1}{x}} = C_3 e^{\frac{1}{x}} \quad (C_3 \neq 0)$

$\iff y = C e^{\frac{1}{x}} \quad (C \in \mathbb{R})$ (en incluant la solution $y=0$)

ENH Elle admet une solution du type $y = C(x)e^{\frac{1}{x}}$; en remplaçant dans l'équation, on obtient

$x^2\left[C'(x)e^{\frac{1}{x}} + C(x)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] + C(x)e^{\frac{1}{x}} = 1$

$\iff C'(x) = \dfrac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$\iff C(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$

Poser $u = -\dfrac{1}{x}$

$du = \dfrac{1}{x^2}dx$

$\iff C(x) = \displaystyle\int e^u du + C_1 = e^{-\frac{1}{x}} + C_1$

La solution générale de l'équation proposée est donc

$$y = C(x)e^{\frac{1}{x}} = C_1 e^{\frac{1}{x}} + 1$$

Détermination de la constante C_1

$y=0$ AH en $+\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} \left(C_1 e^{\frac{1}{x}} + 1\right) = 0 \iff C_1 + 1 = 0$

$\iff C_1 = -1$

La solution cherchée est

$$\underline{y = 1 - e^{\frac{1}{x}}}$$

---

2. $y'' - 2y' = xe^{2x} + \sin 3x$

EH $\quad y'' - 2y' = 0$

$EC \equiv z^2 - 2z = 0 \iff z=0$ ou $z=2$

$\longrightarrow \underline{y_h(x) = C_1 + C_2 e^{2x}}$

ENH Elle admet une solution particulière

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

où

y_{p_1} vérifie $y'' - 2y' = x e^{2x}$ (1)

y_{p_2} vérifie $y'' - 2y' = \sin 3x$ (2)

Recherche de y_{p_1} (méthode des exponentielles-polynômes)

(1) admet une sol. du type $y_{p_1} = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2+Bx)e^{2x}$

~~Remplaçons dans (1)~~ : comme

$$y'_{p_1} = (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x}$$

$$y''_{p_1} = (4Ax^2 + 4Bx + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 2A)e^{2x}$$

il vient

$$\left[4Ax^2 + (4B+8A)x + (4B+2A)\right]e^{2x} - 2\left[2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B\right]e^{2x} = xe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + 2A + 2B = x \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = -1/4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y_{p_1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{2x}$$

Recherche de y_{p_2} : ($\sin 3x = \mathcal{I} e^{j3x}$)

On a $y_{p_2} = \mathcal{I} y^*_{p_2}$ où $y^*_{p_2}$ vérifie $y'' - 2y' = e^{j3x}$ (3)

Cherchons une solution de (3) du type $y^*_{p_2} = A e^{j3x}$:

en remplaçant dans (3), il vient

$$-9Ae^{j3x} - 6jAe^{j3x} = e^{j3x} \Leftrightarrow -(9+6j)A = 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-1}{9+6j} = -\frac{1}{3(3+2j)} = -\frac{3-2j}{3.13} = \frac{2j-3}{39}$$

Ainsi

$$y^*_{p_2}(x) = \frac{1}{39}(2j-3)e^{j3x}$$

et

$$y_{p_2}(x) = \mathcal{I}\, y^*_{p_2}(x) = \frac{1}{39}\mathcal{I}\left[(2j-3)(\cos 3x + j \sin 3x)\right]$$

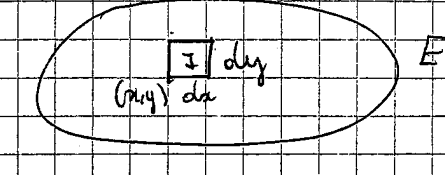
$$= \frac{1}{39}(2\cos 3x - 3\sin 3x)$$

Conclusion La solution générale de l'équation proposée est

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C_2\right)e^{2x} + \frac{1}{39}(2\cos 3x - 3\sin 3x)$$

QUESTION III

a) . Découpons E en intervalles élémentaires



$$I = [x, x+dx] \times [y, y+dy]$$

. La masse de l'intervalle I est donnée par

$$dM = \rho(x,y) \cdot (\text{aire de } I) = \rho(x,y)\, dx\, dy$$

(on peut supposer que $\rho(x,y)$ reste constant dans I, ce qui est d'autant plus crédible que dx, dy sont proches de

. $$M = \lim_{\substack{dx \to 0 \\ dy \to 0}} \sum_I dM = \lim_{\substack{dx \to 0 \\ dy \to 0}} \sum_I \rho(x,y)\, dx\, dy = \iint_E \rho(x,y)\, dx\, d$$

b) $$M = \iint_E \frac{1}{x+y+2\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy \quad , \quad E = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2, y \geq 0$$

La fonction à intégrer $\in C_0(E \setminus \{(0,0)\})$; on ne peut pas en déduire qu'elle $\in L_1(E)$.

Introduisons les coordonnées polaires : il vient

$$M = \iint_{E^*} \frac{r}{r\cos\theta + r\sin\theta + 2r}\, dr\, d\theta = \iint_{E^*} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta + 2}\, dr\, d\theta$$

où

$$E^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq R, \ \theta \in [0,\pi]\}.$$

La fonction à intégrer $\in C_0(E^*)$; comme E^* est un compact, elle $\in L_1(E^*)$; il vient donc

$$M = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 2} \int_0^R dr = R \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 2}$$

Posons $\quad u = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \iff \theta = 2 \operatorname{arctg} u \quad$ (CV entre $\theta \in]-\pi,\pi[$ et $u \in \mathbb{R}$

On a

$$\left| \begin{array}{l} d\theta = \dfrac{2\,du}{1+u^2} \ ; \ \cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \ ; \ \sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \theta = 0 \Leftrightarrow u = 0 \ , \ \theta = \pi \Leftrightarrow u = +\infty \end{array} \right.$$

de sorte que

$$M = R \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + 2} \frac{2\,du}{1+u^2} = 2R \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2u+3}$$

$$= 2R \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2+2} = 2R \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{u+1}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \sqrt{2} R \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

QUESTION IV

1. $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; posons $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

<u>Sens</u> • $f(x) \in C_0(]0,+\infty[) \Rightarrow f(x) \in C_0(]0,1])$

• Intégrabilité en 0^+

(C_0) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = "\frac{-\infty}{0}" = -\infty$??

(θ) Soit $\theta \in]0,1[$; on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^\theta f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\theta-\frac{1}{3}} \ln x = \begin{cases} -\infty \text{ si } \theta < \frac{1}{3} \\ 0 \text{ si } \theta > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, si $\theta \in]\frac{1}{3}, 1[$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^\theta f(x) = 0 \Rightarrow f \in L_1 \text{ en } 0^+$$

<u>Calcul</u> (par parties)

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad \Big| \quad f = \ln x \to f' = \frac{1}{x}, \quad g' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}} \to g = \frac{3}{2} x^{2/3}$$

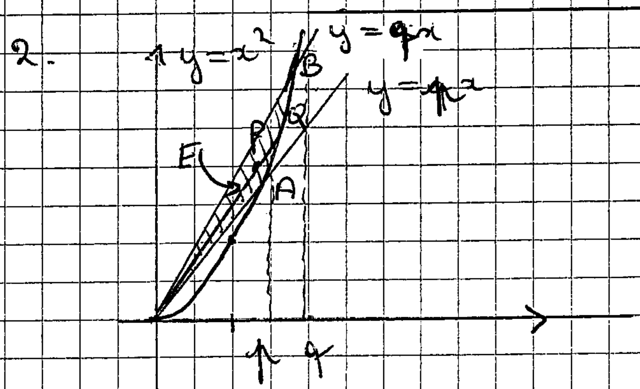
$$= \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}} \ln x\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$$

(si cette dernière $\int$ $\exists$ ce qui est le cas car $\frac{1}{x^{1/3}} \in L_1$ en 0^+ ($\theta = \frac{1}{3} < 1$))

$$= \frac{3}{2}\Big(\ln 1 - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}} \ln x}_{= "0\times(-\infty)" = 0}\Big) - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{9}{4}$$

2.



$$a = \iint_E dx\,dy$$

$1 \in C_0(E)$, E compact $\Rightarrow 1 \in L_1(E)$

a) Déterminons les coordonnées des points A et B

$$A \equiv \begin{cases} y = px \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = px \\ x^2 - px = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p \quad (\text{car } x > 0) \\ y = p^2 \end{cases}$$

On a donc

$$A(p, p^2) \quad \text{et} \quad B(q, q^2)$$

Calculons l'intégrale double par réduction : comme

$$E_x = [0, q]$$

$$E_y(x) = \begin{cases} [px, qx] & \text{si } x \in [0, p] \\ [x^2, qx] & \text{si } x \in [p, q] \end{cases},$$

il vient

$$\mathcal{A} = \int_0^p dx \int_{px}^{qx} dy + \int_p^q dx \int_{x^2}^{qx} dy$$

$$= \int_0^p (q-p)x + \int_p^q (qx - x^2)\,dx$$

$$= (q-p)\,\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^p + \frac{q}{2}\left[x^2\right]_p^q - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_p^q$$

$$= \frac{1}{2}p^2(q-p) + \frac{1}{2}q(q^2-p^2) - \frac{1}{3}(q^3-p^3)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}p^2q} - \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}q^3 - \cancel{\frac{1}{2}p^2q} - \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{3}p^3$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(q^3-p^3)}$$

b) Un point quelconque Q de l'arc $\widehat{AB}$ s'écrit

$$Q(u, u^2) \quad \text{avec } u \in [p, q]$$

Un point quelconque P de E s'écrit

$$P(vu, vu^2) \quad \text{avec } u \in [p, q],\ v \in [0, 1]$$

En posant

$$\begin{cases} x = vu \\ y = vu^2 \end{cases} \Rightarrow \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} v & u \\ 2vu & u^2 \end{pmatrix} = -v$$

il vient

$$\mathcal{A} = \int_p^q du \int_0^1 \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv$$

$$= \int_p^q du \int_0^1 v u^2\,dv$$

$$= \int_p^q u^2\,du \int_0^1 v\,dv = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_p^q \frac{1}{2}\left[v^2\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(q^3-p^3)}$$