

FILTRES, STRUCTURE UNIFORME ET TOPOLOGIE

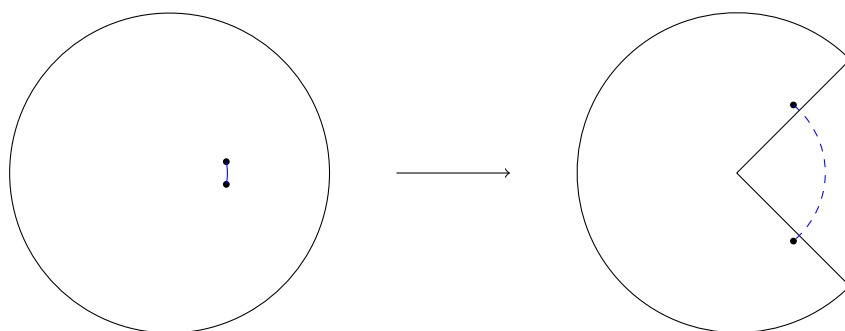
Seirios

Table des matières

Introduction	5
1 Ensembles filtrés	9
Exercices	13
2 Espaces topologiques	15
2.1 Topologie sur un ensemble	15
2.2 Limites de filtres	16
2.3 Continuité	18
2.4 Compacité	19
2.5 Exercices	21
3 Opérations sur les espaces topologiques	23
3.1 Topologie initiale	23
3.2 Topologie finale	25
3.3 Exercices	26
Corrections des exercices	27
Chapitre 1	27

Introduction

Le maître mot de la topologie est *continuité*, la topologie est l'étude des transformations continues d'un espace. La première question à se poser est de savoir comment formaliser cette notion de continuité. Un synonyme pourrait être *sans déchirure*. Or qu'est-ce qu'une déchirure? C'est une transformation qui éloigne significativement deux points initialement proches, comme l'illustre la figure suivante :

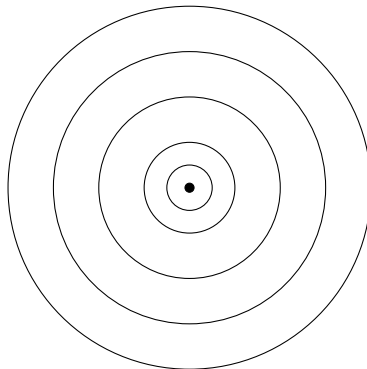


Une transformation continue serait donc une transformation envoyant deux points proches sur deux points proches, et l'on est ainsi ramené à définir la notion de *proximité*. Intuitivement, la notion de *proximité* est voisine de celle de *distance*, mais d'une certaine manière la distance traite tous les points de la même manière, si bien que l'on ne pourra pas faire varier la notion de proximité dans l'espace, au gré de nos envies. Gardons donc une certaine liberté et définissons la proximité indépendamment de la notion de distance.

Pour cela, nous allons définir un ensemble de *voisinages* $\mathcal{V}(x)$ pour tout point x de l'espace, c'est-à-dire un ensemble de parties V contenant x et nous dirons qu'un second point y est V -proches de x si $y \in V$. Toutefois, il nous faut demander certaines contraintes sur $\mathcal{V}(x)$, pour obtenir une *structure* consistante. Tout d'abord, nous demandons que l'ensemble des voisinages soit non vide, sans quoi nous n'aurions rien apporté ; ensuite, nous demandons à $\mathcal{V}(x)$ d'être stable par intersection finie, ce qui nous permet de dire que si y est à la fois U -proche et V -proche de x , alors il est également $U \cap V$ -proche de x , ie. que l'on raffine la proximité de y à x ; enfin, nous demandons à ce que toute partie contenant un voisinage de x soit un voisinage de x , ce qui nous permet de dire que si y est U -proche de x , alors il est également V -proche de x pour tout $V \supset U$.

Les propriétés que nous venons d'évoquer font de l'ensemble des voisinages un *filtre*. Nous passerons le premier chapitre à approfondir cette notion, mais une première remarque est que l'ensemble des voisinages n'est pas commode à manipuler, parce qu'il contient beaucoup d'éléments. Pour remédier à cela, nous montrerons que l'on peut

extraire l'information du filtre des voisinages d'un point via une *base fondamentale de voisinages* $\mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$, de telle sorte qu'une partie est un voisinage de x si, et seulement si, elle contient un élément de la base $\mathfrak{B}(x)$ de $\mathcal{V}(x)$. C'est la notion de base fondamentale de voisinages qui sera la plus intuitive et la plus maniable ; par exemple, dans le plan, une base fondamentale de voisinages d'un point peut être l'ensemble des boules centrées sur ce point :



Usuellement, l'on ordonne l'ensemble des filtres sur notre espace par l'inclusion et un filtre \mathfrak{F}_1 est dit plus fin qu'un second filtre \mathfrak{F}_2 si $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. En particulier, on remarque que si un filtre \mathfrak{F} est plus fin que le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages d'un point x , alors pour tout voisinage V de x , \mathfrak{F} contient une partie dont tous les éléments sont V -proches de x ; c'est pourquoi on dit que \mathfrak{F} *converge* vers x . Dès lors, la topologie de notre espace sera entièrement déterminée par la donnée des filtres convergents, aussi pourrions-nous caractériser cette topologie en terme de convergence de filtres, ce qui n'est pas sans rappeler la convergence des suites dans les espaces métriques¹.

Dans ce contexte de voisinages, une transformation f sera continue si pour tout point x et pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que tout élément U -proche de x est envoyé sur un élément V -proche de $f(x)$ ².

Nous ferons le lien entre cette vision de la topologie et la présentation usuelle que l'on en fait au chapitre 2, puis l'on formulera et démontrera les résultats classiques de topologie en termes de filtres aux chapitres 2 et 3.

Tout comme dans le cas métrique, il n'est néanmoins pas toujours facile de montrer qu'un filtre est convergent. Une solution est, toujours dans le cas métrique, d'introduire la notion de *suite de Cauchy* et de *complétude*. Nous allons suivre cet exemple en termes de filtres. Pour cela, il nous faut étendre notre notion de *proximité* définie plus haut au cas où aucun point n'est préalablement fixé. En partant de l'idée que deux points x et y sont proches si, et seulement si, (x, y) est proche de la diagonale Δ du produit cartésien, on se donne un filtre de voisinages \mathcal{U} de Δ et si $U \in \mathcal{U}$ on dit que x et y sont proches d'ordre U si $(x, y) \in U$. Pour imposer à la relation que l'on construit d'être

1. Précisément, une suite converge dans notre espace si, et seulement si, le filtre engendré par les parties contenant tous les termes de la suite sauf un nombre fini, converge également.

2. D'un point de vue technique, l'ensemble des couples (X, π) où X est un ensemble et π une application associant à tout $x \in X$ un filtre basé en x définit une catégorie pour les applications dont les images réciproques de voisinages sont des voisinages qui est équivalente à la catégorie des espaces topologiques pour les fonctions continues définie usuellement.

symétrique, on demande également à \mathcal{U} d'être stable par symétrie par rapport à Δ ; de plus, on souhaite qu'il existe des éléments de \mathcal{U} arbitrairement rapprochés autour de Δ , aussi impose-t-on également la condition suivante : pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathcal{U}$ tel que $\overset{2}{W} \subset V$, en notant $\overset{2}{W} = \{(x, y) | \exists z, (x, z), (z, y) \in W\}$ ³. Sous ces conditions, on dit que \mathcal{U} est une *structure uniforme* de notre espace et les éléments de \mathcal{U} sont des *entourages*.

Une fois que l'on s'est donné une structure uniforme \mathcal{U} sur notre espace, on dira alors qu'un filtre \mathfrak{F} est *de Cauchy* si pour tout entouragement V , \mathfrak{F} contient une partie petite d'ordre V ie. dont les éléments sont tous proches d'ordre V . Ensuite, on peut vérifier que tout filtre convergent est un filtre de Cauchy et alors on définira un espace uniforme *complet* comme un espace uniforme dont tous les filtres de Cauchy convergent.

Nous parlerons de l'existence et des propriétés des structures uniformes au chapitre 4, puis nous nous intéresserons à la notion de complétude au chapitre 6. Finalement, nous vérifierons au chapitre 7 que les résultats que nous aurons obtenus s'identifient aux résultats usuels dans le cas des espaces métriques.

Durant notre étude, nous pourrions constater la grande similarité entre les rôles des filtres dans les espaces topologiques et les suites dans les espaces métriques, c'est pourquoi les filtres sont considérés comme une généralisation des suites dans le cadre topologique. Il existe néanmoins d'autres manières, peut-être plus naturelles, d'étendre la notion de suite. Ce sera l'objet de notre dernier chapitre : nous introduirons la notion de *suite généralisée* et nous montrerons que ce formalisme est équivalent à celui des filtres.

3. Dans le cadre métrique, cette condition implique, pour tout $r > 0$, l'existence d'une boule de rayon $r/2$.

Chapitre 1

Ensembles filtrés

Dans ce chapitre, on fixe un ensemble X . Commençons par définir l'objet principal de ce document :

Définition 1.1 : Soit \mathfrak{F} un ensemble non vide de parties de X . On dit que \mathfrak{F} est un *filtre* sur X si :

- (i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
- (ii) Pour tout $F \subset X$, s'il existe $\Omega \in \mathfrak{F}$ tel que $\Omega \subset F$, alors $F \in \mathfrak{F}$.
- (iii) Toute intersection finie d'éléments de \mathfrak{F} appartient à \mathfrak{F} .

On dit alors que (X, \mathfrak{F}) est un *ensemble filtré*.

Exercice 1.2 : Démontrer que les ensembles suivants forment un filtre sur X : l'ensemble des voisinages d'une partie non vide de X , l'ensemble des parties de X contenant une partie non vide $A \subset X$.

Ensuite, on définit sur l'ensemble des filtres sur X une relation d'ordre :

Définition 1.3 : Soient \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 deux filtres sur X . On dit que \mathfrak{F}_1 est *plus fin* que \mathfrak{F}_2 si $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$.

Exercice 1.4 : Montrer qu'il s'agit bien un ordre, et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit total.

En guise de premiers exemples de filtres, considérons la propriété suivante :

Propriété 1.5 : Pour toute partie non vide $A \subset X$, il existe un plus petit filtre contenant A . On dit que A *engendre* ce filtre.

Preuve : Montrons que $\mathfrak{F} = \{F \subset X \mid A \subset F\}$ est le plus petit filtre contenant A . Remarquons d'abord que $X \in \mathfrak{F}$ puisque $A \subset X$ et $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ puisque tout élément de \mathfrak{F} contient A qui est non vide. Ensuite, soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$; alors $\begin{cases} A \subset F_1 \\ A \subset F_2 \end{cases}$, d'où $A \subset F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$. Ainsi, \mathfrak{F} est stable par intersection finie. Soient $F \in \mathfrak{F}$ et $G \subset X$ tel que $F \subset G$. Alors $A \subset F \subset G$, donc $G \in \mathfrak{F}$. Par conséquent, \mathfrak{F} est bien un filtre.

Soit \mathfrak{F}' un second filtre contenant A . Alors par définition, toute partie contenant A appartient à \mathfrak{F}' , donc $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ ce qui achève la démonstration. \square

En général, un filtre contient un grand nombre d'éléments, si bien qu'il est difficilement manipulable. Il est en fait possible d'en extraire une partie sans perdre d'information :

Définition 1.6 : Soit \mathfrak{B} un ensemble de parties de X . On dit que \mathfrak{B} est une *base de filtre* si :

- (i) \mathfrak{B} n'est pas vide et $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,
- (ii) L'intersection de deux éléments de \mathfrak{B} contient un élément de \mathfrak{B} .

Propriété 1.7 : Soient \mathfrak{B} un ensemble de parties de X . Alors $\mathfrak{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathfrak{B}, B \subset F\}$ est un filtre si, et seulement si, \mathfrak{B} est une base de filtre. Dans ce cas, on dit que \mathfrak{B} engendre \mathfrak{F} ou que \mathfrak{B} est une *base du filtre* \mathfrak{F} .

Preuve : Si $\mathfrak{B} = \emptyset$, alors $\mathfrak{F} = \emptyset$. Supposons donc $\mathfrak{B} \neq \emptyset$.

Remarquons que, indépendamment de \mathfrak{B} , $X \in \mathfrak{F}$ et \mathfrak{F} vérifie la deuxième propriété de la définition d'un filtre. Donc \mathfrak{F} est un filtre sur X si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \mathfrak{F} \\ \forall F_1, F_2 \in \mathfrak{F}, F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F} \end{array} \right.$.

Or $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ équivaut à $\emptyset \notin \mathfrak{B}$. Supposons que $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, \exists B_3 \in \mathfrak{B}, B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$. Il existe $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tels que $B_1 \subset F_1$ et $B_2 \subset F_2$, d'où $B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$. Or par hypothèse, il existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ d'où $B_3 \subset F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$. La réciproque est claire en posant $F_1 = B_1$ et $F_2 = B_2$.

Finalement, \mathfrak{F} est un filtre si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \mathfrak{B} \\ \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, \exists B_3 \in \mathfrak{B}, B_3 \subset B_1 \cap B_2 \end{array} \right.$, c'est-à-dire si, et seulement si, \mathfrak{B} est une base de filtre. \square

La propriété suivante donne une structure canonique d'ensemble filtré à certains sous-ensembles d'un espace filtré :

Propriété 1.8 : Soient \mathfrak{F} un filtre sur X , et $A \subset X$. Alors $\mathfrak{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathfrak{F}\}$ définit un filtre sur A si, et seulement si, pour tout $F \in \mathfrak{F}$, $F \cap A \neq \emptyset$. On dit alors que \mathfrak{F} *induit* le filtre \mathfrak{F}_A sur A .

Preuve : Remarquons que, indépendamment de A , \mathfrak{F}_A vérifie les deux dernières propriétés de la définition d'un filtre. En effet, soit $G \subset A$ tel qu'il existe $F \cap A \in \mathfrak{F}_A$ contenu dans G . Alors $F \subset (F \cap A) \cup (X \setminus A) \subset G \cup (X \setminus A)$, donc $G \cup (X \setminus A) \in \mathfrak{F}$ et $G = (G \cup (X \setminus A)) \cap A \in \mathfrak{F}_A$. Ensuite, $A \in \mathfrak{F}_A$ et pour tout $F, G \in \mathfrak{F}_A$, $F \cap G \in \mathfrak{F}_A$. Ainsi, \mathfrak{F}_A est un filtre sur A si, et seulement si, $\emptyset \notin \mathfrak{F}_A$ ce qui équivaut à : $\forall F \in \mathfrak{F}, F \cap A \neq \emptyset$. \square

Nous avons précédemment ordonné l'ensemble des filtres sur X ; il se trouve que les éléments maximaux sont très utiles :

Définition 1.9 : Un *ultrafiltre* sur X est un élément maximal de l'ensemble ordonné des filtres sur X .

Exercice 1.10 : Montrer que le filtre engendré par un singleton est un ultrafiltre.

Un tel ultrafiltre, engendré par un singleton, est dit *principal*; dans le cas contraire, il est dit *non principal*. L'existence d'ultrafiltres non principaux est donnée par la propriété suivante¹ :

1. La preuve que nous donnons utilise le théorème de Zorn, ie. l'axiome du choix mais l'existence d'ultrafiltres non principaux n'est pas équivalente à l'axiome du choix, aussi parle-t-on parfois d'*axiome de l'ultrafiltre* pour désigner cette existence.

Propriété 1.11 : Soit \mathfrak{F} un filtre sur X . Alors il existe un ultrafiltre \mathfrak{U} plus fin que \mathfrak{F} .

Preuve : Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que l'ensemble des filtres sur X est inductif et d'appliquer le théorème de Zorn. Soit $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ une chaîne de filtres. Montrons que $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ est un filtre. D'abord, on a $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ et $X \in \mathfrak{F}$. Soit $A \subset X$ tel qu'il existe $B \in \mathfrak{F}$ tel que $B \subset A$. Alors il existe $k \in I$ tel que $B \in \mathfrak{F}_k$ et $A \in \mathfrak{F}_k$, d'où $A \in \mathfrak{F}$.

Soient $F, G \in \mathfrak{F}$. Il existe donc $i, j \in I$ tels que $F \in \mathfrak{F}_i$ et $G \in \mathfrak{F}_j$. Ces deux filtres appartenant à une même chaîne, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_j$. Alors $F, G \in \mathfrak{F}_j$, donc $F \cap G \in \mathfrak{F}_j$ et $F \cap G \in \mathfrak{F}$.

Par conséquent, \mathfrak{F} est bien un filtre. De plus, il majore la chaîne par construction. On en déduit que l'ensemble des filtres sur X est inductif, ce qui achève la démonstration. \square

Il n'est pas aisé de montrer qu'un filtre est un ultrafiltre en utilisant uniquement la définition d'ultrafiltre. L'on dispose en fait d'un critère assez maniable :

Propriété 1.12 : Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre sur X . Si $A \cup B \in \mathfrak{U}$, alors $A \in \mathfrak{U}$ ou $B \in \mathfrak{U}$.

Preuve : Supposons par l'absurde que $A \cup B \in \mathfrak{U}$ et $A, B \notin \mathfrak{U}$. Soit \mathfrak{S} l'ensemble des parties $M \subset X$ telles que $M \cup A \in \mathfrak{U}$. Montrons que \mathfrak{S} est un filtre.

D'abord, $\emptyset \notin \mathfrak{S}$ puisque $A \notin \mathfrak{U}$, et $X \in \mathfrak{S}$. Soit $F \subset X$ tel qu'il existe $M \subset X$ tel que $M \subset F$. Alors $A \cup F \supset A \cup M \in \mathfrak{U}$, donc $A \cup F \in \mathfrak{U}$ et $F \in \mathfrak{S}$.

Soient $F_1, F_2 \in \mathfrak{S}$, et $M_1, M_2 \subset X$ tels que $F_1 \cup M_1, F_2 \cup M_2 \in \mathfrak{U}$. Alors $A \cup (F_1 \cap F_2) \supset A \cup (M_1 \cap M_2) = (A \cup M_1) \cap (A \cup M_2) \in \mathfrak{U}$, donc $A \cup (F_1 \cap F_2) \in \mathfrak{U}$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{S}$.

Ainsi, \mathfrak{S} est bien un filtre. De plus, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$ et $B \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire que \mathfrak{S} est un filtre strictement plus fin que \mathfrak{U} , ce qui est impossible puisque \mathfrak{U} est un ultrafiltre, d'où la conclusion. \square

Propriété 1.13 : Soit \mathfrak{S} un filtre sur X . Alors \mathfrak{S} est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout $A \subset X$, $A \in \mathfrak{S}$ ou $X \setminus A \in \mathfrak{S}$.

Preuve : L'implication est une conséquent de la propriété 1.11. Supposons donc que pour tout $A \subset X$, $A \in \mathfrak{S}$ ou $X \setminus A \in \mathfrak{S}$. Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre plus fin que \mathfrak{S} (qui existe d'après la propriété 1.11). Si $Y \in \mathfrak{U}$, alors $X \setminus Y \notin \mathfrak{U}$, d'où $X \setminus Y \in \mathfrak{S}$, donc par notre hypothèse $Y \in \mathfrak{S}$. Ainsi, \mathfrak{S} est plus fin que \mathfrak{U} ce qui implique $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$. Par conséquent, \mathfrak{S} est un ultrafiltre, ce qui achève la démonstration. \square

Exercice 1.14 : Montrer que dans cette proposition, le *ou* est nécessairement exclusif.

Terminons ce chapitre par la propriété suivante, qui permet notamment de définir le filtre associé à une suite qui sera introduit à l'exercice 5.

Propriété 1.15 : Soient X' un second ensemble, une base de filtre (resp. d'ultrafiltre) \mathfrak{B} sur X et une application $f : X \rightarrow X'$. Alors $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre (resp. d'ultrafiltre) sur X' .

Preuve : Puisque $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, $f(\mathfrak{B}) \neq \emptyset$ et puisque $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, $\emptyset \notin f(\mathfrak{B})$. Soient $f(B_1), f(B_2) \in f(\mathfrak{B})$. Alors $f(B_1) \cap f(B_2) \supset f(B_1 \cap B_2)$, or il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset B_1 \cap B_2$, d'où

$f(B) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$. Ainsi, $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre de X' .

Supposons que \mathfrak{B} soit une base d'ultrafiltre. Notons \mathfrak{U} l'ultrafiltre sur X engendré par \mathfrak{B} et \mathfrak{S} le filtre sur X' engendré par $f(\mathfrak{B})$. Soit $A \subset X'$. Alors $f^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$ ou $f^{-1}(X' \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$. Donc il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset f^{-1}(A)$ ou $B \subset f^{-1}(X' \setminus A)$. Ainsi, $f(B) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$ ou $f(B) \subset f(f^{-1}(X' \setminus A)) \subset X' \setminus A$, c'est-à-dire que $A \in \mathfrak{S}$ ou $X' \setminus A \in \mathfrak{S}$, ce qui montre que \mathfrak{S} est un ultrafiltre.

Exercice 1.16 : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit de même avec l'image réciproque $f^{-1}(\mathfrak{B})$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les filtres sur un ensemble fini. Lesquels sont des ultrafiltres ?

Exercice 2 : Montrer que l'intersection des ensembles d'un ultrafiltre contient au plus un point. Si elle est réduite à un point, l'ultrafiltre est formé des ensembles contenant ce point.

Exercice 3 : Soit X un ensemble infini. On définit sur \mathbb{N} le filtre dit *de Fréchet* formé des parties cofinies, puis associe à toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ le filtre engendré par l'image du filtre de Fréchet par l'application $n \mapsto x_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce filtre soit un ultrafiltre.

Exercice 4 : Montrer que si $A \subset X$ n'appartient pas à un ultrafiltre \mathcal{U} sur X , alors la trace de cet ultrafiltre sur A correspond à l'ensemble des parties de A .

Exercice 5 : Soient X un ensemble et \mathcal{U} un ultrafiltre sur X . Montrer que \mathcal{U} contient le *filtre de Fréchet* (ie. le filtre formé des parties cofinies) ou est principal.

Exercice 6 : Soit $(X_i, \mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles filtrés. Soit, pour tout $i \in I$, \mathfrak{B}_i une base du filtre \mathfrak{F}_i . Notons $X = \prod_{i \in I} X_i$ et \mathfrak{B} l'ensemble des parties de X de la forme $\prod_{i \in I} M_i$ avec $M_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices où $M_i \in \mathfrak{B}_i$. Montrer que \mathfrak{B} est une base de filtre sur X . Que dire si $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ est une famille de bases d'ultrafiltre ? Vérifier que le filtre ainsi construit est le moins fin tel que pour tout $i \in I$, la projection de celui-ci sur X_i corresponde à \mathfrak{F}_i .

Exercice 7 : Soit X un ensemble. Notons Φ l'application qui à un ultrafiltre \mathcal{U} fait correspondre $\omega : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\omega(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour tout $Y \subset X$. Montrer que Φ définit une bijection entre l'ensemble des ultrafiltres sur X et l'ensemble des mesures de probabilité finiment additives sur X .

Chapitre 2

Espaces topologiques

2.1 Topologie sur un ensemble

Avant toute chose, donnons la définition usuelle d'une topologie :

Définition 2.1.1 : Une topologie \mathcal{T} sur un ensemble X est un ensemble de parties de X vérifiant :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- (ii) \mathcal{T} est stable par union quelconque,
- (iii)¹ \mathcal{T} est stable par intersection finie.

On dit que (X, \mathcal{T}) (ou simplement X lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés) est un espace topologique, et que les éléments de \mathcal{T} (resp. les complémentaires des éléments de \mathcal{T}) sont les ouverts de X (resp. sont les fermés de X).

Usuellement, on introduit une relation d'ordre sur les topologies d'un ensemble X : une topologie \mathcal{T}_1 est dite plus fine qu'une seconde topologie \mathcal{T}_2 si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Dès lors, il existe une topologie la plus fine, la topologie discrète $\mathfrak{P}(X)$, et une topologie la moins fine, la topologie grossière $\{\emptyset, X\}$ ².

On remarquera qu'une topologie peut se définir soit à partir des ouverts, soit à partir des fermés. En particulier, la définition d'une topologie implique (en passant au complémentaire) que l'ensemble des fermés d'un espace topologique est stable par union finie et par intersection quelconque.

La topologie d'un ensemble contient souvent de nombreux éléments, aussi en extrait-on souvent une partie qui contient tout de même toute l'information de ladite topologie :

Définition 2.1.2 : Soit \mathcal{T} une topologie sur un ensemble X . On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie \mathcal{T} si tout élément de \mathcal{T} s'écrit comme une union d'éléments de \mathcal{B} .

La notion de base est également très utile pour définir une topologie :

Propriété 2.1.3 : Soient X un ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ stable par intersection finie. Il existe une unique topologie \mathcal{T} dont \mathcal{B} est une base ; de plus, c'est la topologie la moins fine contenant \mathcal{B} . On dit alors que \mathcal{T} est la topologie engendrée par \mathcal{B} .

Suivant les idées introduites en introduction, formalisons la notion de voisinage :

-
1. Exercice : Montrer que cette assertion est équivalente à $(X \in \mathcal{T}) \wedge (\forall U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T})$.
 2. Exercice : Vérifier que ces topologies sont bien définies.

Définition 2.1.4 : Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Un voisinage de A est une partie de X contenant un ouvert de X contenant A . L'ensemble des voisinages de A est noté $\mathcal{V}(A)$.

Si A est réduit à un singleton $\{x\}$, on parle de voisinages de x et on note l'ensemble de ces voisinages $\mathcal{V}(x)$.

Définition 2.1.5 : Soit X un espace topologique. Un système fondamental de voisinages d'un point $x \in X$ est une partie $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ telle que pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W \subset V$.

Il est dès lors possible de caractériser les ouverts en termes de voisinages :

Propriété 2.1.6 : Soit O une partie d'un espace topologique X . Alors O est un ouvert si, et seulement si, il est un voisinage de chacun de ses points.

Preuve : L'implication est claire. Pour la réciproque, pour tout $x \in O$, on se donne un ouvert $O_x \subset O$ contenant x ; dès lors, $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ est un ouvert. \square

Le passage des filtres de voisinages à une topologie est explicité par la propriété suivante :

Propriété 2.1.7 : Soit X un ensemble. Si l'on associe à chaque point $x \in X$ un filtre $\mathfrak{B}(x)$ dont chaque partie contient x , de telle sorte que pour tous $x \in X$ et $V \in \mathfrak{B}(x)$, il existe $W \in \mathfrak{B}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, $V \in \mathfrak{B}(y)$, alors il existe une unique topologie sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathfrak{B}(x)$ soit le filtre des voisinages de x .

Preuve : D'après la propriété précédente, si une telle topologie \mathcal{T} existe, nécessairement $\mathcal{T} = \{O \subset X \mid \forall w \in O, O \in \mathfrak{B}(w)\}$; on vérifie de plus que \mathcal{T} définit bien une topologie, il suffit donc de vérifier que si l'on munit X de cette topologie, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) = \mathfrak{B}(x)$. Soit $x \in X$.

Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors il existe $O \in \mathcal{T}$ contenant x tel que $O \subset V$. Or $O \in \mathfrak{B}(x)$, donc $V \in \mathfrak{B}(x)$. D'où $\mathcal{V}(x) \subset \mathfrak{B}(x)$.

Soit $B \in \mathfrak{B}(x)$. Posons $U = \{y \in X \mid B \in \mathfrak{B}(y)\}$ et remarquons que $\{x\} \subset U \subset B$. Ensuite, pour tout $y \in U$, $B \in \mathfrak{B}(y)$ donc il existe $W \in \mathfrak{B}(y)$ tel que pour tout $z \in W$, $B \in \mathfrak{B}(z)$; on en déduit que $W \subset U$ et donc que $U \in \mathfrak{B}(y)$. Par conséquent, $U \in \mathcal{T}$ d'où $B \in \mathcal{V}(x)$. Finalement, $\mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. \square

2.2 Limites de filtres

Comme annoncé dans l'introduction, intéressons-nous à la notion de convergence sur les filtres :

Définition 2.2.1 : Soient X un espace topologique, \mathfrak{F} un filtre sur X et $x \in X$. On dit que \mathfrak{F} converge vers x si \mathfrak{F} est plus fin que le filtre des voisinages de x .

Tout comme pour les suites, il y a une notion plus faible de point d'adhérence.

Définition 2.2.2 : Soient X un espace topologique et $A \subset X$. L'adhérence de A dans X , notée \bar{A} , est le plus petit fermé de X contenant A .

Définition 2.2.3 : Soient X un espace topologique, \mathfrak{F} un filtre sur X et $x \in X$. On dit que x est un point d'adhérence de \mathfrak{F} (ou bien qu'il est adhérent à \mathfrak{F}) si x est adhérent à tout élément de \mathfrak{F} .

On remarquera que si \mathfrak{F} converge, alors les points de convergence sont les points d'adhérence de \mathfrak{F} . Pour les ultrafiltres, il se trouve que les notions de convergence et d'adhérence se confondent :

Propriété 2.2.4 : Soient X un ensemble et \mathfrak{U} un ultrafiltre sur X . Si $x \in X$ est un point d'adhérence de \mathfrak{U} , alors \mathfrak{U} converge vers x .

Preuve : Supposons par l'absurde que \mathfrak{U} ne converge pas vers x ; alors il existe un voisinage V de x n'appartenant pas à \mathfrak{U} . Posons $\mathfrak{B} = \{U \cap V \mid U \in \mathfrak{U}\}$. Alors \mathfrak{B} est non vide, ne contient pas l'ensemble vide (puisque x est adhérent à \mathfrak{U}) et est stable par intersection; par conséquent, \mathfrak{B} est une base de filtre. Si l'on note \mathfrak{G} le filtre engendré, alors \mathfrak{G} est un filtre strictement plus fin que \mathfrak{U} , puisque $V \in \mathfrak{G}$ et $V \notin \mathfrak{U}$, ce qui est impossible puisque \mathfrak{U} est un ultrafiltre. Par conséquent, \mathfrak{U} converge bien vers x . \square

Propriété 2.2.5 : Soient X un espace topologique, \mathfrak{B} une base de filtre sur X et $x \in X$. Alors x est adhérent au filtre engendré par \mathfrak{B} si, et seulement si, x est adhérent à tout élément de \mathfrak{B} .

Preuve : Ce résultat découle directement du fait que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ et que tout élément de \mathfrak{F} contient un élément de \mathfrak{B} . \square

Par abus de langage, on pourra parler de point d'adhérence à une base de filtre ou de convergence d'une base de filtre.

Donnons nos premiers exemples de propriétés topologiques traduites en terme de filtres :

Définition 2.2.6 : Soit X un espace topologique. On dit que X est séparé si pour tout $x, y \in X$, il existe deux voisinages ouverts U_x et U_y de x et y respectivement, tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.³

Propriété 2.2.7 : Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est séparé,
- (ii) Tout filtre sur X admet au plus un point limite,
- (iii) Tout ultrafiltre sur X admet au plus un point d'adhérence.

Preuve : Montrons que (i) implique (ii). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un filtre \mathfrak{F} convergeant vers deux points distincts x et y . Comme X est séparé, il existe deux voisinages disjoints V_x et V_y de x et y respectivement. Comme $V_x, V_y \in \mathfrak{F}$, on en déduit que $\emptyset = V_x \cap V_y \in \mathfrak{F}$, ce qui est contradictoire.

Montrons que (ii) implique (i). Raisonnons par contraposée et supposons que X n'est pas séparé. Dans ce cas, il existe $x, y \in X$ distincts tels que pour tous voisinages V_x et V_y de x et y respectivement, $V_x \cap V_y \neq \emptyset$. Dès lors, nous pouvons introduire la base de filtre $\mathfrak{B} = \{V_x \cap V_y \mid V_x \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y)\}$; notons \mathfrak{F} le filtre qu'elle engendre. Alors \mathfrak{F} est un filtre convergeant vers x et y .

3. Montrer que la topologie discrète est séparée, mais que la topologie grossière ne l'est pas.

Ensuite, (ii) implique clairement (iii) grâce à la propriété 2.2.4.

Montrons que (iii) implique (ii). Soit \mathfrak{F} un filtre sur X . Alors il existe un ultrafiltre \mathfrak{U} plus fin que \mathfrak{F} . Dès lors, tout point de convergence de \mathfrak{F} est un point d'adhérence de \mathfrak{U} . Par conséquent, d'après (iii), \mathfrak{F} a au plus un point de convergence. \square

Propriété 2.2.8 : Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Si $x \in \overline{A}$, alors il existe une base de filtre $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(A)$ convergeant vers x . Réciproquement, si une base de filtre $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(A)$ converge vers $x \in X$, alors $x \in \overline{A}$.

Ainsi, \overline{A} est l'ensemble des points de convergence des bases de filtre sur A .

Preuve : Soit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(A)$ une base de filtre convergeant vers un point $a \in X$. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset V$. En particulier, $V \cap A \neq \emptyset$, d'où $a \in \overline{A}$. Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$. Alors $\mathfrak{B} = \{V \cap A, V \in \mathcal{V}(x)\} \subset \mathfrak{P}(A)$ est une base de filtre convergeant vers x . \square

2.3 Continuité

Donnons tout d'abord la définition usuelle de la continuité d'une application :

Définition 2.3.1 : Soient (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}') deux espaces topologiques. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est continue si pour tout $O \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

Nous allons donner plusieurs définitions équivalentes de la continuité, notamment pour faire le lien avec ce qui a été dit dans l'introduction, puis pour en donner une définition en terme de filtres. D'abord, introduisons quelques définitions :

Définition 2.3.2 : Soient $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux ensembles et \mathfrak{F} un filtre sur X . Si le filtre sur Y engendré par $f(\mathfrak{F})$ converge vers un point $a \in Y$, on dit que a est la limite de f par rapport à \mathfrak{F} .

Si X et Y sont des espaces topologiques, on définit la limite (si elle existe) de f en un point $x \in X$ comme la limite de f par rapport au filtre $\mathcal{V}(x)$.

Le résultat principal de notre paragraphe est alors le suivant :

Propriété 2.3.3 : Soient (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}') deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) f est continue.
- (ii) Pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(f(x))$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(U) \subset V$.
- (iii) Pour tout $a \in X$, la limite de f en a vaut $f(a)$.
- (iv) Pour tout filtre \mathfrak{F} sur X convergeant vers un point $a \in X$, le filtre sur Y engendré par $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(a) \in Y$.
- (v) Pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve : Montrons que (i) implique (ii). Soient $x \in X$ et V un voisinage de $f(x)$. Alors il existe un ouvert V_0 contenant $f(x)$ tel que $V_0 \subset V$; posons $U = f^{-1}(V_0)$. Alors U un

4. Exercice : Montrer que $f : X \rightarrow Y$ est continue si, et seulement si, pour tout fermé $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans X .

ouvert contenant x , en particulier c'est un voisinage de x et $f(U) = f(f^{-1}(V_0)) \subset V_0 \subset V$.

Montrons que (ii) implique (iii). Soient $a \in X$ et \mathfrak{F} le filtre engendré par $f(\mathcal{V}(a))$. D'après (i), pour tout $V \in f(\mathcal{V}(a))$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Or $f(U) \in \mathfrak{F}$ d'où $V \in \mathfrak{F}$. On en déduit que \mathfrak{F} converge vers $f(a)$, autrement dit que la limite de f en a est $f(a)$.

Montrons que (iii) implique (iv). Soient \mathfrak{F} un filtre convergeant vers a et \mathfrak{S} le filtre engendré par $f(\mathfrak{F})$. D'après (iii), $\mathcal{V}(f(a)) \subset \mathfrak{S}_0$ où \mathfrak{S}_0 est le filtre engendré par $f(\mathcal{V}(a))$. Or $\mathcal{V}(a) \subset \mathfrak{F}$ donc $f(\mathcal{V}(a)) \subset f(\mathfrak{F})$, d'où $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$. Par conséquent, $\mathcal{V}(f(a)) \subset \mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$ donc \mathfrak{S} converge vers $f(a)$.

Montrons que (iv) implique (i). Supposons par l'absurde qu'il existe un ouvert O de Y tel que $f^{-1}(O)$ ne soit pas ouvert dans X . Alors il existe $x \in f^{-1}(O)$ tel que $f^{-1}(O)$ ne soit pas un voisinage de x , donc tout voisinage V de x n'est pas inclu dans $f^{-1}(O)$; remarquons néanmoins que $x \in V \cap f^{-1}(O)$ donc $V \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$. Dès lors, $\mathfrak{B} = \{V \cap f^{-1}(O) \mid V \in \mathcal{V}(x)\}$ est une base de filtre sur $X \setminus f^{-1}(O)$ dont x est un point d'adhérence et le filtre \mathfrak{F} engendré par \mathfrak{B} converge vers x . D'après (iv), le filtre \mathfrak{S} engendré par $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(x)$. Or $f(\mathfrak{B})$ est une base de \mathfrak{S} , donc $f(x)$ est adhérent à la base $f(\mathfrak{B})$; en effet, pour tout voisinage U de $f(x)$ et pour tout $B \in f(\mathfrak{B})$, $U, B \in \mathfrak{S}$ donc $U \cap B \neq \emptyset$ puisque $\emptyset \notin \mathfrak{S}$. De plus, pour tout $B \in \mathfrak{B}$, $B \subset X \setminus f^{-1}(O) = f^{-1}(X \setminus O)$ donc $f(B) \subset X \setminus O$; c'est-à-dire que $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur $X \setminus O$. Finalement, d'après le propriété 2.2.8, $f(x)$ appartient à l'adhérence de $X \setminus O$; comme O est ouvert, on en déduit que $f(x) \notin O$, ce qui est absurde.

Montrons que (i) implique (v). Soient $x \in \overline{A}$ et $V \in \mathcal{V}(f(x))$. D'après la continuité de f , il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(W) \subset V$. On a alors $V \cap f(A) \supset f(W) \cap f(A) \supset f(A \cap W)$. Or x est dans l'adhérence de A , donc $A \cap W \neq \emptyset$, d'où $V \cap f(A) \neq \emptyset$ et $y \in f(A)$.

Montrons que (v) implique (i). Soient $F \subset Y$ un fermé et \mathfrak{B} une base de filtre sur $f^{-1}(F)$ ayant un point d'adhérence x . Alors $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur $f(f^{-1}(F)) \subset F$. De plus, pour tout $B \in \mathfrak{B}$, $x \in \overline{B}$ d'où $f(x) \in \overline{f(B)} \subset f(B)$, donc $f(x) \in F$ ou $x \in f^{-1}(F)$. Par conséquent, $f^{-1}(F)$ est fermé. \square

Les points (ii), (iii) et (iv) motivent la définition suivante :

Définition 2.3.4 : Soient (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}') deux espaces topologiques, $a \in X$ et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est continue en a si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiées :

- (i) Pour tout $V \in \mathcal{V}(f(a))$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$.
- (ii) La limite de f en a vaut $f(a)$.
- (iii) Pour tout filtre \mathfrak{F} sur X convergeant vers un point a , le filtre sur Y engendré par $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(a) \in Y$.

2.4 Compacité

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une classe particulière d'espace topologique, celle des espaces compacts; bien que cette introduction pourra paraître artificielle, l'importance de la notion de compacité se justifie par son utilité dans de nombreux contextes.

Définition 2.4.1 : Soit X un espace topologique. On dit que X est quasi-compact si pour tout recouvrement d'ouverts de X , il existe un sous-recouvrement fini⁵.

Propriété 2.4.2 : Soit X un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est quasi-compact.
- (ii) Pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie $K \subset I$ telle que $\bigcap_{i \in K} F_i = \emptyset$.
- (iii) Tout filtre sur X admet un point d'adhérence.
- (iv) Toute ultrafiltre sur X est convergent.

Preuve : Il est clair que (iii) implique (iv) : d'après (iv), tout ultrafiltre admet un point d'adhérence, or un ultrafiltre admettant un point d'adhérence converge vers celui-ci, d'où (iv). Réciproquement, pour tout filtre \mathfrak{F} sur X , l'ultrafiltre plus fin que \mathfrak{F} converge avec un point $a \in X$; ainsi, a est adhérent à la base de cette ultrafiltre et donc à \mathfrak{F} .

Passée au complémentaire, la propriété de Borel-Lebesgue donnant (ii), on en déduit que (i) est équivalent à (ii).

Supposons qu'il existe une famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ et telle que pour toute partie finie $K \subset I$, $\bigcap_{i \in K} F_i \neq \emptyset$. Alors il existe un filtre \mathfrak{F} engendré par cette famille. Soit $a \in X$ un point adhérent à ce filtre. Alors a est adhérent à la base de \mathfrak{F} , donc $a \in \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Par conséquent, \mathfrak{F} ne possède pas de point d'adhérence. On a donc montré que (iii) implique (ii).

Réciproquement, supposons qu'il existe un filtre \mathfrak{F} sans point d'adhérence. Alors $\bigcap_{U \in \mathfrak{F}} \overline{U} = \emptyset$, mais pour tout $V \subset \mathfrak{F}$ fini $\bigcap_{U \in V} \overline{U} \neq \emptyset$, puisque $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ et $\bigcap_{U \in V} \overline{U} \in \mathfrak{F}$. Cette famille contredit donc (ii), c'est-à-dire que (ii) implique (iii). \square

Donnons ensuite quelques propriétés classiques sur les espaces quasi-compacts (nous anticipons ici sur le chapitre suivant, où nous introduirons la topologie induite) :

Propriété 2.4.3 : L'image d'un quasi-compact par une application continue est quasi-compact.

Preuve : Soient X un espace topologique quasi-compact, Y un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Donnons-nous $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de $f(X)$. Par continuité de f , $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de X ; par quasi-compacité de X , il existe $K \subset I$ fini tel que $(f^{-1}(O_i))_{i \in K}$ recouvre X . Alors $X \subset f\left(\bigcup_{i \in K} f^{-1}(O_i)\right) \subset \bigcup_{i \in K} O_i$, c'est-à-dire que $(O_i)_{i \in I}$ admet un sous-recouvrement fini, d'où on déduit la quasi-compacité de $f(X)$. \square

Propriété 2.4.4 : Un fermé dans un compact est compact.

Preuve : Soit F une partie fermée d'un espace topologique compact X . Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre sur F . C'est une base de filtre sur X , notons \mathfrak{F} le filtre engendré sur X . Par

5. On parle souvent de cette propriété comme la (*Propriété de Borel-Lebesgue*).

compacité de X , \mathfrak{F} admet un point d'adhérence $x \in X$. D'après la propriété 2.2.5, x est adhérent à toute base de \mathfrak{F} et donc à \mathfrak{U} . Comme \mathfrak{U} est un ultrafiltre, x est un point de convergence de \mathfrak{U} ; de plus, F est fermé donc $x \in F$.

Nous venons de montrer que tout ultrafiltre sur F converge dans F , d'où la compacité de F . \square

Propriété 2.4.5 : Un compact dans un séparé est fermé.

Preuve : Soit C une partie compact d'un espace topologique séparé X . Soit \mathfrak{B} une base de filtre sur C convergeant vers $x \in X$; notons \mathfrak{F} le filtre sur X engendré par \mathfrak{B} . Comme X est séparé, \mathfrak{F} a au plus un point de convergence; de plus, par compacité de C , \mathfrak{B} a au moins un point d'adhérence dans C . Par conséquent, puisque \mathfrak{F} converge vers x , x est le seul point d'adhérence de \mathfrak{B} , d'où $x \in C$.

Nous venons ainsi de montrer que toute base de filtre sur C convergeant dans X converge dans C , donc C est fermé. \square

Pour terminer, montrons que les topologies compactes sont minimales dans le sens suivant :

Propriété 2.4.6 : Soient \mathcal{T}_1 une topologie compacte sur X et \mathcal{T}_2 une topologie séparée sur X moins fine. Alors nécessairement, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Preuve : Comme \mathcal{T}_2 est moins fine que \mathcal{T}_1 , la bijection $\text{id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue. De plus, si F est fermé dans (X, \mathcal{T}_1) , il est compact d'après la propriété 2.4.4, donc $\text{id}(F)$ est compact dans (X, \mathcal{T}_2) d'après la propriété 2.4.3 et finalement fermée d'après la propriété 2.4.5; ainsi, id est une application fermée. On en déduit que id est un homéomorphisme et donc que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. \square

2.5 Exercices

Exercice 1 : Trouver un exemple d'espace topologique contenant une partie à la fois ouverte et fermée, puis une partie ni ouverte ni fermée.

Exercice 2 : Soit (X, \leq) un ensemble ordonné. Pour tout $x \in X$, notons $[x, \rightarrow [= \{y \in X \mid y \geq x\}$. On munit alors X de la topologie engendré par les $[x, \rightarrow [$, $x \in X$. Montrer que X est un espace topologique de Kolmogoroff⁶ non séparé.

Soient X et Y deux ensembles ordonnés munis de la topologie décrite précédemment. Montrer qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si, et seulement si, elle es croissante.

Exercice 3 : Soient un ensemble X et deux topologies \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 sur X . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{T}_1 est une topologie plus fine que \mathcal{T}_2 .
- (ii) L'identité $i : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue.
- (iii) Tout filtre convergeant vers $x \in X$ pour \mathcal{T}_1 , converge vers x pour \mathcal{T}_2 .

Exercice 4 : Soient deux espaces topologiques X , Y et une application $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est ouverte (resp. fermée) si l'image de tout ouvert (resp. de tout fermé)

6. Un espace topologique X est dit de Kolmogoroff si pour tous $x, y \in X$, il existe un voisinage de x ne contenant pas y .

est ouverte (resp. fermée). Montrer que si f est surjective, alors f est ouverte si, et seulement si, f est fermée.

Exercice 5 : Soit A une partie d'un espace topologique X . On définit l'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$, comme le plus grand ouvert contenu dans A ; on définit ensuite la frontière de A par $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Soit $x \in X$. Montrer que :

- (i) $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$.
- (ii) $x \in \overset{\circ}{A}$ si, et seulement si, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset A$.
- (iii) $x \in \partial A$ si, et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap X \setminus A \neq \emptyset$.

Chapitre 3

Opérations sur les espaces topologiques

3.1 Topologie initiale

Théorème 3.1.1 : Soient $((X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques, Y un ensemble et $(f_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'applications. Alors il existe une unique topologie minimale (pour la relation d'inclusion) sur Y rendant continue les f_λ , $\lambda \in L$. On dit que cette topologie est la topologie initiale associée à $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Preuve : Notons \mathcal{B} l'ensemble des intersections finies d'éléments de la forme $f_\lambda^{-1}(O)$ avec $\lambda \in L$ et O un ouvert de X_λ . Alors \mathcal{B} engendre une topologie \mathcal{T} . Clairement, toute topologie pour laquelle les f_λ , $\lambda \in L$, sont continues est moins fine que \mathcal{T} ; on en déduit que \mathcal{T} est la seule topologie vérifiant les contraintes du théorème. \square

Définition 3.1.2 : Soit $((X, \lambda))_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques. La topologie produit définie sur le produit cartésien $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ est la topologie initiale associée aux projections canoniques $\text{pr}_\mu : \prod_{\lambda \in L} X_\lambda \rightarrow X_\mu$, $\mu \in L$.

En utilisant la base de la topologie initiale trouvée dans la preuve précédente, on obtient que :

Propriété 3.1.3 : Soit $((X, \lambda))_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques. Alors l'ensemble des ouverts de la forme $\prod_{\lambda \in L} O_\lambda$ où O_λ est un ouvert de X_λ et telle que $O_\lambda = X_\lambda$ pour tout $\lambda \in L$ sauf un nombre fini, définit une base de la topologie produit.

Donnons ensuite quelques propriétés de la topologie produit :

Propriété 3.1.4 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé si, et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est séparé.

Preuve : Supposons $\prod_{i \in I} X_i$ séparé et donnons-nous un indice $j \in I$ et deux éléments distincts $x, y \in X_j$. Posons $(x_i)_i, (y_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i$ tels que $x_i = y_i$ pour $i \neq j$ et $x_j = x$, $y_j = y$; en particulier, $\text{pr}_j(\tilde{x}) = x$ et $\text{pr}_j(\tilde{y}) = y$. On peut dès lors se donner deux voisinages disjoints V_1 et V_2 de $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ respectivement, de la forme donnée à la propriété 3.1.3. Ainsi, $\text{pr}_j(V_1)$ et $\text{pr}_j(V_2)$ sont deux voisinages disjoints de x et y respectivement. Par conséquent, X_j est séparé.

Respectivement, supposons les X_i , $i \in I$, séparés et donnons-nous $(x_i)_i, (y_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i$ distincts. Alors il existe $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$ et puisque X_j est séparé, il existe deux voisinages disjoints U_j et V_j de x_j et y_j respectivement. Posons $U = \prod_{i \in I} U_i$ et $V = \prod_{i \in I} V_i$ avec $U_i = X_i$ si $i \neq j$ et $V_i = X_i$ si $i \neq j$. Dès lors, U et V sont des voisinages disjoints de $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ respectivement. Donc $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé. \square

Théorème 3.1.5 : (de *Tykhonov*) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors $\prod_{i \in I} X_i$ est quasi-compact (resp. compact) si, et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est quasi-compact (resp. compact).

Preuve : La propriété précédente permet de montrer le théorème seulement pour le cas quasi-compact.

Supposons $\prod_{i \in I} X_i$ quasi-compact. Soit $i \in I$. Par définition de la topologie produit,

$\text{pr}_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ est continue, d'où on en déduit que $X_i = \text{pr}_i \left(\prod_{j \in I} X_j \right)$ est quasi-compact d'après la propriété 2.4.3.

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, X_i soit quasi-compact. Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre sur $\prod_{i \in I} X_i$. Alors pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i(\mathfrak{U})$ est une base d'ultrafiltre sur X_i qui converge vers un point $a_i \in X_i$ par quasi-compactité. Notons $a = (a_i)_{i \in I}$ et montrons que \mathfrak{U} converge vers a .

Soit V un ouvert contenant a . On peut écrire $V = \prod_{i \in I} O_i$ avec les O_i ouverts et $O_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. Notons $K = \{i \in I \mid O_i \neq X_i\}$. Alors pour tout $i \in K$, il existe $B \in \mathfrak{U}$ tel que $\text{pr}_i(B) \subset O_i$; comme $B \subset \text{pr}_i^{-1}(\text{pr}_i(B)) \subset \text{pr}_i^{-1}(O_i)$, on a $\text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$. Finalement, on a $V = \bigcap_{i \in I} \text{pr}_i^{-1}(O_i) = \bigcap_{i \in K} \text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$ puisque K est fini. Donc \mathfrak{U} est convergent et $\prod_{i \in I} X_i$ est quasi-compact. \square

Propriété 3.1.6 : Soient Y , $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques et $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ une application. Alors f est continue si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ est continue.

Preuve : L'implication est immédiate, la composition de deux fonctions continues étant elle-même continue. Réciproquement, soit O un ouvert de $\prod_{i \in I} X_i$. On peut dès lors écrire $O = \prod_{i \in I} O_i$ avec les O_i des ouverts de X_i et distincts de X_i seulement pour un ensemble d'indice $K \subset I$ fini. Pour tout $i \in K$, il existe un ouvert Ω_i de Y tel que $\text{pr}_i \circ f(\Omega_i) \subset O_i$. Pour $i \in I \setminus K$, posons $\Omega_i = X_i$. Alors $\Omega = \bigcap_{i \in I} \Omega_i = \bigcap_{i \in K} \Omega_i$ est un ouvert de Y est $f(\Omega) = \prod_{i \in I} \text{pr}_i \circ f(\Omega) \subset \prod_{i \in I} \text{pr}_i \circ f(\Omega_i) \subset \prod_{i \in I} O_i = O$. Donc f est continue. \square

Un autre exemple important de topologie initiale est celui de la topologie induite :

Définition 3.1.7 : Soit A une partie d'un espace topologique X . On définit sur A la topologie induite correspondant à la topologie initiale associée à l'injection canonique $i : A \rightarrow X$.

Ainsi, on dira qu'une partie d'un espace topologique vérifie une propriété topologique donnée si cette partie, munie de la topologie induite, vérifie effectivement cette propriété en tant qu'espace topologique. Rappelons que nous avons donné quelques résultats sur les parties compactes dans le paragraphe consacré à la compacité.

3.2 Topologie finale

Théorème 3.2.1 : Soient $((X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques, Y un ensemble et $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y)_{\lambda \in L}$ une famille d'applications. Alors il existe une unique topologie maximale (pour la relation d'inclusion) sur Y rendant continue les f_λ , $\lambda \in L$. On dit que cette topologie est la topologie finale associée à $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Preuve : Notons $\mathcal{T} = \{O \subset Y \mid \forall \lambda \in L, f_\lambda^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\lambda\}$. Alors on vérifie aisément que \mathcal{T} définit bien une topologie sur Y rendant continues les f_λ , $\lambda \in L$. De plus, pour toute autre topologie \mathcal{T}' rendant continue ces applications, la définition de la continuité impose que pour tout $O \in \mathcal{T}'$, pour tout $\lambda \in L$, $f_\lambda^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\lambda$, donc \mathcal{T} est nécessairement plus fine. La maximalité de \mathcal{T} implique son unicité. \square

Définition 3.2.2 : Soient X un espace topologique et \sim une relation d'équivalence sur X . On définit sur X/\sim la topologie quotient comme la topologie finale associée à la surjection canonique $j : X \rightarrow X/\sim$

Donnons ensuite quelques propriétés de la topologie quotient :

Propriété 3.2.3 : Soient X un espace topologique et \sim une relation d'équivalence sur X . X/\sim est séparé si, et seulement si, le graphe $\mathcal{G} = \{(x, y) \in E \times E \mid x \sim y\}$ de la relation \sim est fermé dans $X \times X$ (muni de la topologie produit).

Preuve : Supposons X/\sim séparé. Soit $(x, y) \in (X \times X) \setminus \mathcal{G}$. Alors $\bar{x} \neq \bar{y}$, donc il existe U et V deux voisinages respectifs de \bar{x} et \bar{y} pour la topologie quotient tels que $U \cap V = \emptyset$. Alors $j^{-1}(U)$ (resp. $j^{-1}(V)$) est un voisinage de x (resp. de y) dans X , donc $W = j^{-1}(U) \times j^{-1}(V)$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times X$ pour la topologie produit. De plus, pour tout $(r, s) \in W$, $(\bar{r}, \bar{s}) \in U \times V$ d'où $\bar{r} \neq \bar{s}$ puisque $U \cap V = \emptyset$. Ainsi, $W \subset (X \times X) \setminus \mathcal{G}$, donc $(X \times X) \setminus \mathcal{G}$ est ouvert c'est-à-dire que \mathcal{G} est fermé.

Réciproquement, supposons que \mathcal{G} soit fermé et fixons $\bar{x}, \bar{y} \in X/\sim$ distincts. Alors $(x, y) \in (X \times X) \setminus \mathcal{G}$. Donc il existe deux voisinages U et V de x et y respectivement tels que $U \times V \subset (X \times X) \setminus \mathcal{G}$. Alors, en notant j la surjection canonique entre X et X/\sim , $j(U)$ et $j(V)$ sont des voisinages de \bar{x} et \bar{y} respectivement. En effet, en utilisant la surjectivité de j , on a $j^{-1}(j(U)) = U$ et $j^{-1}(j(V)) = V$ qui sont des voisinages de x et y respectivement. Supposons par l'absurde que $j(U) \cap j(V) \neq \emptyset$. Soit donc $\bar{z} \in j(U) \cap j(V)$. Alors $z \in j^{-1}(j(U) \cap j(V)) = U \cap V$, d'où $(z, z) \in U \times V$, ce qui est impossible puisque $(z, z) \in \mathcal{G}$. Par conséquent, $j(U)$ et $j(V)$ sont des voisinages disjoints de \bar{x} et \bar{y} respectivement. X/\sim est alors bien séparé. \square

Propriété 3.2.4 : Soient X, Y deux espaces topologique, \sim une relation d'équivalence sur X et $f : X/\sim \rightarrow Y$ une application. Notons π la surjection canonique de X dans X/\sim . Alors f est continue si, et seulement si, $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ est continue.

Preuve : De même que précédemment, l'implication est claire. Réciproquement, soit $O \subset Y$ un ouvert. Alors il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $f \circ \pi(U) \subset O$. Posons

$V = \pi(U)$. Comme $\pi^{-1}(V) = U$ est un ouvert de X , V est un ouvert de X/\sim . Or $f(V) \subset O$, donc f est continue. \square

3.3 Exercices

Exercice 1 : Soit X un espace topologique. Si $A \subset B \subset X$, montrer que A est ouvert dans B si, et seulement si, il existe un ouvert O de X tel que $O \cap B = A$. Trouver un exemple où A est ouvert dans B mais pas dans X .

Exercice 2 : Soit X un espace topologique. Alors X est séparé si, et seulement si, la diagonale Δ de $X \times X$ est fermée pour la topologie produit.

Corrections des exercices

Chapitre 1

Exercice 1 :

Exercice 2 :

Exercice 3 :

Exercice 4 :

Exercice 5 :

Exercice 6 :

Exercice 7 :