Une démonstration de l'inégalité de Poincaré

Ivan Nourdin

22 février 2001

Mots-clés: compacité, connexité.

Nous cherchons à démontrer le :

Théorème 1 *(Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné, connexe et de frontière suffisamment régulière. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que :*

$$(*)\ \ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

Pour cela, nous allons utiliser le :

Théorème 2 *(de Rellich) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné et de frontière suffisamment régulière. Alors l'injection :*

$$H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

est compacte.

Faisons donc la démonstration du théorème 1. Par l'absurde, supposons que l'inégalité de Poincaré (*) ne soit pas vérifiée. On peut donc considérer une suite (u_n) de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant, pour tout n, les conditions :

$$(1)\ \ \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

$$(2)\ \ \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \geq n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

De (2), on tire :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$$

ce qui prouve d'une part que $\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ et d'autre part que la suite (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$. Grâce au théorème de Rellich, on peut supposer (modulo une extraction) que la suite (u_n) converge dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction u de $L^2(\Omega)$. En regardant tout ceci au sens des distributions, il vient $u_n \to u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\nabla u_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme on a en outre $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on obtient $\nabla u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ω étant supposé connexe, on en déduit que u est constante puis nulle (vu que $u \in H_0^1(\Omega)$). Ceci contredit (1) !$\square$

Remarque. La démonstration proposée ici est très simple. Pourtant, il faut être conscient qu'elle utilise de manière fondamentale le théorème 2 de Rellich dont la preuve est plutôt compliquée !