Preuve: Considérons en effet un polynôme non constant P de degré n tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$. La fonction $f = \dfrac{1}{P}$ est donc non constante et analytique. Il nous suffit donc de prouver qu'elle est bornée sur $\mathbb{C}$ pour conclure via le théorème de Liouville VI.III.3.18 : on a,

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

avec $a_n \neq 0$. Donc $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = \infty$. On peut donc trouver un disque fermé $\mathcal{D}$ tel que :

– en dehors de $\mathcal{D}$, la fonction $f = \dfrac{1}{P}$ est bornée car $|P|$ tend ver $+\infty$.

– dans $\mathcal{D}$, $f = \dfrac{1}{P}$ est continue sur un compact donc bornée aussi.

En conclusion, f est bornée sur $\mathbb{C}$ et le théorème est démontré. ■

Remarque: Par récurrence sur le degré et division euclidienne, ce résultat entraîne qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, comptées avec leur multiplicité.

Je ne comprends pas cette affirmation
Quelqu'un peut-il me l'expliquer ?

III.4 La formule de la moyenne

Proposition VI.III.4.21 (Propriété de la moyenne)**.**

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$. Pour tout disque fermé $\mathcal{D}(z_0, r)$ inclus dans $\mathcal{U}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt.$$

Géométriquement, la valeur d'une fonction holomorphe en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est le centre de gravité de l'image du cercle $f\big(\mathcal{D}(z_0, r)\big)$, pour tout réel $r > 0$ assez petit.

Preuve: Il s'agit d'une application directe de la formule de Cauchy (I.1.5). Considérons une paramétrisation $\gamma = z_0 + re^{it}$ du cercle $C_{z_0,r}$. On a immédiatement :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{z_0,r}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} d\varsigma = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

■

La propriété de la moyenne permettrait de montrer en particulier que le principe du module maximum III.III.3.30 page 85 indépendamment du caractère analytique. Nous ne le ferons pas ici.

En parlant du principe du maximum, citons en une application aux fonctions harmoniques réelles définies en IV. page 51.

III.5 Unicité de la solution dans un problème de Dirichlet

En mathématiques, le problème de Dirichlet est de trouver une fonction harmonique définie sur un ouvert $\mathcal{U}$, de $\mathbb{R}^2$ prolongeant une fonction continue définie sur la frontière de l'ouvert $\mathcal{U}$. Ce problème porte le nom du mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.