ESPACES VECTORIELS NORMES. THEOREME DU POINT FIXE

Mohammed Jai

Sport Etude
Groupe 37

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Normes et Distances **3**
2.1 Définitions . . . 3
2.2 Exemples fondamentaux . . . 4
2.2.1 $E = \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . 4
2.2.2 Norme définie à partir d'un produit scalaire . . . 5
2.2.3 Normes définies sur les espaces fonctionnels . . . 5
2.2.4 Normes matricielles induites . . . 6
2.3 Normes équivalentes . . . 7
2.3.1 Dans un espace de dimension finie . . . 7
2.3.2 Dans un espace de dimension infinie . . . 7

3 Continuité **8**
3.1 Définitions . . . 8
3.2 Limite d'une suite de points de E . . . 9
3.3 Limite d'une fonction . . . 10
3.4 Continuité d'une fonction . . . 10

4 Espaces vectoriels normés complets **10**
4.1 Suites de Cauchy . . . 11
4.2 Espaces vectoriels normés complets . . . 11
4.3 Exemples fondamentaux . . . 11
4.3.1 Dans un espace de dimension finie . . . 11
4.3.2 Dans un espace de dimension infinie . . . 11

5 Théorème du point fixe **12**
5.1 Le théorème de point fixe global . . . 12
5.2 Le théorème de point fixe local . . . 13
5.3 Exemple en dimension 1 . . . 13
5.3.1 Graphiquement . . . 14
5.3.2 Calcul . . . 14
5.3.3 Programme Maple . . . 15

6 Résolution des systèmes linéaires **15**
6.1 Introduction . . . 15
6.2 Principe des méthodes itératives . . . 16
6.3 Méthode de Jacobi . . . 17
6.4 Programme Maple . . . 17
6.5 Méthode de Gauss Seidel . . . 19
6.6 Programme Maple . . . 19

7 Exercices **21**

1 Introduction

Le but de ce chapitre est la généralistion de la notion de valeur absolue pour les réels ou le module pour les complexes dans le cas d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. E peut être $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, l'espace des fonctions continues ou n'importe quel autre espace vectoriel. Nous pourrons ainsi généraliser

- la notion de limite de suite d'éléments de E
- la continuité d'une application d'un espace vectoriel E vers un autre espace vectoriel F.

2 Normes et Distances

2.1 Définitions

DÉFINITION 2.1 (Norme). *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une* **norme** *sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lll} N1. & \forall u \in E,\ N(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0 & (\textbf{Séparation}) \\ N2. & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, N(\lambda u) = |\lambda| N(u) & (\textbf{ Homogénéité}) \\ N3. & \forall u, v \in E,\ N(u+v) \leqslant N(u) + N(v) & (\textbf{ Inégalité triangulaire}) \end{array}$$

Notation : La norme N est notée $\| \ \|$ ou $\| \ \|_E$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\| \ \|$ est dit un **espace vectoriel normé**. On le note par $(E, \| \ \|)$.

Quelques remarques concernant la définition de la norme :

- La propriété N2. entraîne que $N(-u) = N(u)$ et dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $N(iu) = N(u)$.
- La norme sert, dans un espace vectoriel, non seulement à savoir la taille des objets constituant l'espce vectoriel mais aussi à connaitre la distance entre ces objets.

DÉFINITION 2.2 (Distance). *Soit E un ensemble quelconque. On dit que d est une* **distance** *sur E si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lll} D1. & d \text{ est une application de } E \times E \text{ dans } \mathbb{R}^+ & \\ D2. & \forall u, v \in E,\ d(u,v) = 0 \Longleftrightarrow u = v & (\textbf{Séparation}) \\ D3. & \forall u, v \in E, d(u,v) = d(v,u) & (\textbf{ Symétrie}) \\ D4. & \forall u, v, w \in E,\ d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v) & (\textbf{ Inégalité triangulaire}) \end{array}$$

Si d est une distance sur E alors (E, d) est appelé **espace métrique**.

REMARQUE 2.3. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $(u, v) \in E \times E \to d(u, v) = \|u - v\| \in \mathbb{R}^+$ est une distance sur E appelée distance associée à la norme $\| \cdot \|$.*

PROPRIÉTÉ 2.4. *Si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé, alors :*

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad |\ \|u\| - \|v\|\ | \leqslant \|u - v\|$$

2.2 Exemples fondamentaux

2.2.1 $E = \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Pour une matrice $A = (a_{ij})$ de type (m, n) on appelle matrice adjointe de A et on note A^*, la matrice de type (n, m) définie par $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\overline{a_{ji}}$ étant le nombre complexe cojugué de a_{ji}. Dnas le cas où la matrice A est réelle, la matrice adjointe A^* est la transposée de la matrice A.
Le produit scalaire dans $\mathbb{K}^n$ est défini par

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^* x$$

Dans $\mathbb{K}^n$ on a les normes suivantes :

Pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$1) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$2) \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i} = \sqrt{{}^t x \bar{x}}$$

$$3) \quad \|x\|_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|$$

Démonstration. Toutes les conditions de la définition d'une norme se démontrent facilement sauf l'inégalité triangulaire qu'on démontrera pour les trois exemples :
Nous avons pour tout α, β réels ou complexes : $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$. Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

1. **Inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_1$**

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

2. **Inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_\infty$**
   Nous avons pour $i = 1, 2, \ldots n$

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

   d'où $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

3. **Inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$**
   Montrons tout d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

$$|Re(x|y)|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0$. Ce qui est équivalent à

$$\lambda^2 \|y\|_2^2 + 2\lambda((x|y) + \overline{(x|y)}) + \|x\|_2^2 \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

L'inégalité précédente n'est vraie que si $\Delta = 4(|Re(x|y)|^2 - \|x\|_2^2\|y\|_2^2) \leqslant 0$, ce qui est justement l'inégalité de Cauchy-Schwarz demandée.
Montrons maintenant l'inégalité triangulaire.

$$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2Re(x|y) + \|y\|_2^2$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient l'inégalité triangulaire.

□

REMARQUE 2.5. *Si $E = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left({}^t xx\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme euclidienne. C'est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.*

2.2.2 Norme définie à partir d'un produit scalaire

Soient E un espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique et définie positive (d.p) sur E. Soit q la forme quadratique associée. L'application N définie par :

$$\begin{array}{rccc} N: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & N(x) = \sqrt{q(x)} \end{array}$$

est une norme sur E.
Preuve : Vérifions les trois propriétés d'une norme :
$N1$. Si $x = 0$, alors $N(x) = 0$. Vérifions la réciproque : Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$, alors, d'après la définition de N, $q(x) = 0$ et puisque q est définie positive x est forcément égal à 0.
$N2$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = \sqrt{q(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 q(x)} = |\lambda|\sqrt{q(x)}. = |\lambda| N(x)$
$N3$. $\forall x, y \in E$, $N(x+y)^2 = q(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$ car f est bilinéaire et symétrique. De plus f est un produit scalaire donc, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = N(x)N(y)$. Donc $N(x+y)^2 \leqslant N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2 = (N(x) + N(y))^2$

2.2.3 Normes définies sur les espaces fonctionnels

Dans cette partie nous considérons l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Dans $C([a,b],\mathbb{R})$ nous avons les normes suivantes :

Pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ll} 1) & \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \\ 2) & \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \\ 3) & \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{array}$$

Montrons que l'application $\| \|_1$ est une norme.
$N1$. Si $f \equiv 0 \Longrightarrow \|f\|_1 = 0$. Réciproquement, si $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx = 0$, comme $|f|$ est positive est continue, on doit avoir $f(x) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$.
$N2$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|dx = |\lambda| \|f\|_1$.
$N3$. $\forall f, g \in E, \forall \in [a,b], |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)|$. Donc $\int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

2.2.4 Normes matricielles induites

Soit $E = M_n(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées d'ordre n.
Pour une matrice $A \in E$, on note $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]}$.

Théorème et définition : Si $\| \|$ est une norme de $\mathbb{K}^n$ alors
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), |||A||| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ définit une norme de $M_n(\mathbb{K})$.
C'est la norme matricielle induite par la norme $\| \|$ de $\mathbb{K}^n$.

DÉFINITION 2.6. *Le rayon spectral d'une matrice B, noté $\rho(B)$ est le plus grand des modules des valeurs propres de B.*

PROPRIÉTÉ 2.7. *La norme $||| \; |||$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), |||A||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \leqslant |||A||| \|x\|$
3. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leqslant |||A|||.|||B|||$
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) \leqslant |||A|||$.

Dans le cas des trois normes usuelles de $\mathbb{R}^n$, les normes matricielles induites correspondantes sont données dans le tableau suivant :

Norme de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$	Norme matricielle induite
$\| \; \|_1$	$\|\|\|A\|\|\|_1 = \max\limits_{j \in [1,n]} \left(\sum\limits_{i=1}^n \|a_{ij}\| \right)$
$\| \; \|_\infty$	$\|\|\|A\|\|\|_\infty = \max\limits_{i \in [1,n]} \left(\sum\limits_{j=1}^n \|a_{ij}\| \right)$
$\| \; \|_2$ ($\mathbb{R}^n$ seulement)	$\|\|\|A\|\|\|_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$

Démonstration. **1. Preuve de $|||A|||_1$**
Soit $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \; |x_j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leqslant \|x\|_1 \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Il reste à montrer l'autre inégalité. Soit k tel que

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

Considérons le vecteur v de composantes v_i :

$$v_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Alors

$$\|Av\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

□

2.3 Normes équivalentes

DÉFINITION 2.8. *Dans un espace vectoriel E, deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont dites équivalentes si et seulement si il existe deux constantes positives K_1, K_2 telles que :*

$$\forall u \in E : K_1\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant K_2\|u\|_1$$

2.3.1 Dans un espace de dimension finie

Dans $E = \mathbb{K}^n$, les trois normes usuelles sont équivalentes. Plus précisément on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty}$$

Plus généralement nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2.9. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.*

2.3.2 Dans un espace de dimension infinie

REMARQUE 2.10. *Le théorème précédent n'est plus valable dans un espace vectoriel normé de dimension infinie. En effet, considérons l'espace E des fonctions continues, et les normes usuelles sur E, définies dans la section 2.2.3. Nous avons les inégalitées suivantes :*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$$

Mais les normes $\|f\|_1$, $\|f\|_2$, $\|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes deux à deux. Montrons par l'absurde, par exemple, que les normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ ne sont pas équivalentes. Pour simplifier nous considérons le cas $a = 0$ et $b = 1$. Supposons que les deux normes sont équivalentes, c'est à dire il existe une constante positive K telle que

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant K\|f\|_1 \tag{1}$$

et prenons la suite de fonctions f_n définie par

$$\begin{array}{rccl} f_n: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \text{si } \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

D'après la relation (1), nous avons $\|f_n\|_2 \leqslant K\|f_n\|_1$. Or $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2n}$ et $\|f_n\|_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$. Par suite $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{n} \leqslant K$. Or K est une constante donnée, donc pour n suffisamment grand l'inégalité est impossible.

REMARQUE 2.11. *A l'aide de ce résultat on montre que l'espace E est de dimension infinie. Car s'il était de dimension finie on aurait équivalence entre les normes.*

3 Continuité

3.1 Définitions

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On a les définitions suivantes :

- **Boule ouverte :**
  On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a,r)$ définit par

$$B(a,r) = \{u \in E, \|u - a\| < r\}$$

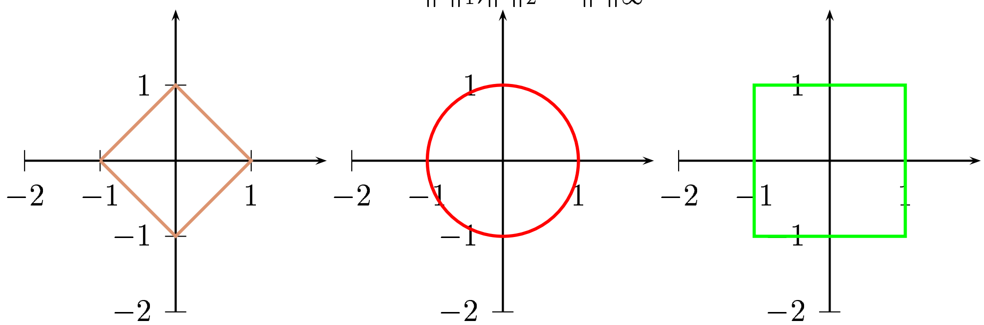
- **Boule fermée :**
  On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble $\bar{B}(a,r)$ définit par

$$\bar{B}(a,r) = \{u \in E, \|u - a\| \leqslant r\}$$

- **Sphère :**
  On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a,r)$ définit par

$$S(a,r) = \{u \in E, \|u - a\| = r\}$$

Exemple :
Soit $E = \mathbb{R}^2$. Dans ce cas les boules ouvertes $B_1(0,1)$, $B_2(0,1)$ et $B_\infty(0,1)$ correspondant successivement aux normes $\|\ \|_1$,$\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont comme suit :



$B_1(0,1)$ $B_2(0,1)$ $B_\infty(0,1)$

DÉFINITION 3.1. *Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est dite bornée si et seulement si il existe un réel positif K tel que $\|u\| \leqslant K$ pour tout $u \in A$.*

DÉFINITION 3.2. *On dit qu'une application f d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ vers un espace vectoriel normé $(F, \|\ \|_F)$ est bornée si et seulement si la partie $f(E)$ de F est bornée. Autrement dit, si et seulement si il existe un réel positif K tel que $\|f(u)\| \leqslant K$ pour tout $u \in E$.*

DÉFINITION 3.3 (Ouvert). *Un ensemble U de E est dit ouvert si*

$$\forall u \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(u,r) \subset U$$

DÉFINITION 3.4 (Fermé). *Un ensemble U de E est dit fermé si son complémentaire dans E est un ouvert.*

PROPOSITION 3.5. *Une boule ouverte est un ensemble ouvert.*

Exemples : Dans $E = \mathbb{R}$

- Les ensembles du type $]a,b[$ sont des ouverts.
- L'ensemble $[0,1[$ n'est pas un ouvert. En effet il n'existe pas de réel $r > 0$ tel que $]-r,r[\subset [0,1[$.

3.2 Limite d'une suite de points de E

Les définitions de suites de vecteurs d'un espace vectoriel normés, de suites extraites, sont similaires à celles des nombres réels (ou complexes).

DÉFINITION 3.6. *On appelle* **suite bornée** *de l'espace vectoriel normé E toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant K$$

DÉFINITION 3.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, c'est à dire une application*

$$n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in E$$

On dit que (u_n) une **suite convergente** *vers la limite $l \in E$, on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, si la suite des nombres $\|u_n - l\|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, autrement dit*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|u_n - l\| = 0$$

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Propriétés

- Toute suite convergente est bornée.
- Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires de $\mathbb{K}$ convergente vers λ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ convergente vers u alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λu.
- Si $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont deux normes équivalentes d'un espace vectoriel E alors on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \text{ dans } (E, \| \ \|_1) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = l \text{ dans } (E, \| \ \|_2)$$

  Ainsi, dans un sepace de dimension finie (toutes les normes sont équivalentes), pour prouver qu'une suite est convergente on choisit la norme la mieux adaptée.
- Si (u_n) converge vers a alors $(\|u_n\|)$ converge vers $\|a\|$.
- Toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite.

3.3 Limite d'une fonction

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur K et f une application de E dans F. Soit u_0 un point de E.
On dit que f admet une limite $l \in F$ au point u_0 si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, (\|u - u_0\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(u) - l\|_F < \epsilon)$$

Notation : $\lim\limits_{\substack{u\to u_0 \\ u\in E}} f(u) = l$.

Propriétés

- Une fonction f admet l pour limite en un point $a \in E$ si, et seulement si pour toute suite $(a_n)_n$ de points de E tendant vers a, la suite $(f(a_n))_n$ tend vers l.
- Pour montrer que f ne tend pas vers l il suffit donc de trouver une suite $(a_n)_n$ de points de E tendant vers a, la suite $(f(a_n))_n$ ne tendant pas vers l.

3.4 Continuité d'une fonction

DÉFINITION 3.8. *On considère les même hypothèses que la section 3.3. On dit que f est continue au point u_0 si et seulement si*

$$\lim_{\substack{u\to u_0 \\ u\in E}} f(u) = f(u_0)$$

En pratique : pour étudier une notion de limite, de continuité, de différentibilité dans $(E, \| \ \|_1)$, on peut remplacer la norme $\| \ \|_1$ par une norme équivalente $\| \ \|_2$, c'est à dire :

$u_n \to l$ dans $(E, \| \ \|_1) \Longleftrightarrow u_n \to l$ dans $(E, \| \ \|_2)$
lorsque $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont équivalentes

4 Espaces vectoriels normés complets

Soit $(E, \| \ \|)$ espace vectoriel normé.

4.1 Suites de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite une suite de Cauchy de $(E, \| \|)$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_{n+p} - u_n\| < \epsilon)$$

REMARQUE 4.1. *De même que la notion de convergence ne dépendait pas de la norme équivalente choisie sur E, de même la notion de suite de Cauchy n'en dépend pas. Plus précisément :*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \| \|_1) \Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \| \|_2)$
lorsque $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont équivalentes

PROPOSITION 4.2. *Toute suite convergente de $(E, \| \|)$ est une suite de Cauchy de $(E, \| \|)$ mais la réciproque est fausse en général.*

4.2 Espaces vectoriels normés complets

Définition :

1. L'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de $(E, \| \|)$ est convergente.
2. Plus généralement, une partie U d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de U converge vers un élément de U.

Exemple : $(\mathbb{R}, | \|)$ et $(\mathbb{C}, | \|)$ sont des espaces vectoriels normés complets.
Ainsi dans un espace complet il y'a identité entre "suite de Cauchy" et "suite convergente". Puisque les notions de "suite de Cauchy" et "suite convergente" ne dépendent pas des normes équivalentes choisies, on a :

PROPOSITION 4.3. *Si $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont deux normes équivalentes de E et si U est une partie de E alors :*
U est complète pour la norme $\| \|_1 \Longleftrightarrow U$ est complète pour la norme $\| \|_2$.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}$, les intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ sont des parties complètes de $(\mathbb{R}, | \|)$.

4.3 Exemples fondamentaux

4.3.1 Dans un espace de dimension finie

Tout espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie est complet.

4.3.2 Dans un espace de dimension infinie

L'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $C([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme $\| \|_\infty$ est complet.

5 Théorème du point fixe

But : On s'intéresse à la recherche des solutions d'équations de la forme

$$f(x) = x$$

DÉFINITION 5.1. *Une solution de l'équation $x = f(x)$ s'appelle point fixe de f.*

. Sous certaines conditions, on peut affirmer l'existence et l'unicité de ce point fixe et également lui trouver une approximation.
Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur K et f une application de E dans F.

DÉFINITION 5.2. *Une fonction $f : U \subset E \to F$ est dite lipschitzienne sur U si :*

$$\exists k > 0 \text{ telle que } \forall u, v \in U, \|f(u) - f(v)\|_F \leqslant k\|u - v\|_E$$

On dit que f est lipschitzienne sur U de rapport k.

DÉFINITION 5.3. *Si la constante k est strictement plut petite que k la fonction f est dite contractante sur U de rapport k.*

PROPOSITION 5.4. *Une fonction lipschitzienne sur U est continue sur U.*

5.1 Le théorème de point fixe global

THÉORÈME 5.5 (Point fixe global). *Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application .*
Si

1. *E est complet,*
2. *f est contractante sur E de rapport k,*

alors

(i) *f admet un unique point fixe α dans E,*

(ii) *la suite itérée :*

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est convergente vers α

(iii) *nous avons l'estimation d'erreur*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \alpha\| \leqslant \left(\frac{k^n}{1-k}\right) \|u_1 - u_0\|$$

Démonstration. – **Unicité** Supposons que f admet deux points fixes x et y distincts ($f(x) = x, f(y) = y$ et $x \neq y$). Comme f est contractante on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

or $\|x - y\| \neq 0$, donc $k \geqslant 1$, ce qui est absurde.

– **Convergence et existence** Comme E est complet il suffit de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \| \|)$. Pour tout entier m on a

$$\|u_{m+1} - u_m\| = \|f(u_m) - f(u_{m-1})\| \leqslant k\|u_m - u_{m-1}\| \leqslant \cdots \leqslant k^m\|u_1 - u_0\| \qquad (2)$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, et en utilisant l'inégalité (2), on a pour tout entiers p et n :

$$\begin{aligned}\|u_{n+p} - u_n\| &= \|(u_{n+p} - u_{n+p-1}) + (u_{n+p-1} - u_{n+p-2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)\| \\ &\leqslant (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \ldots k^{n+1} + k^n)\|u_1 - u_0\| \\ &= \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\|\end{aligned}$$

On a alors montré que : $\|u_{n+p} - u_n\| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\|$.
Comme f est contractante, $k < 1$ et donc $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $\epsilon > 0$ donné, on peut alors trouver n_0 assez grand tel que si $n > n_0$ et $p > 0$ $\dfrac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| < \epsilon$. Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de $(E, \| \|)$. Comme $(E, \| \|)$ est complet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un élément α de E. Il suffit de montrer que α est un point fixe de f.

□

5.2 Le théorème de point fixe local

THÉORÈME 5.6. *Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé complet, U une partie de E et $f : U \to E$ une application .*
Si

1. *U est une partie fermée de E,*
2. *f est contractante sur U de rapport k,*
3. *U est stable par f (c.à.d. $f(U) \subset U$)*

alors f admet un unique point fixe α dans U, et de plus la suite itérée :

$$\begin{cases} u_0 \in U \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

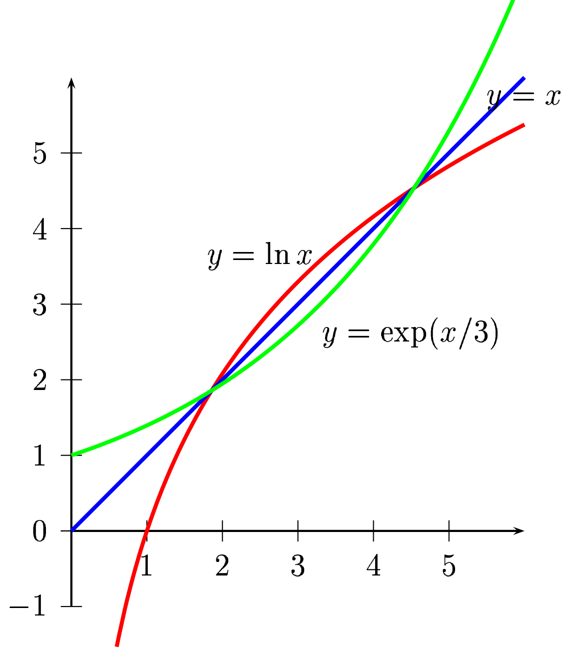
est convergente vers α et nous avons l'estimation d'erreur

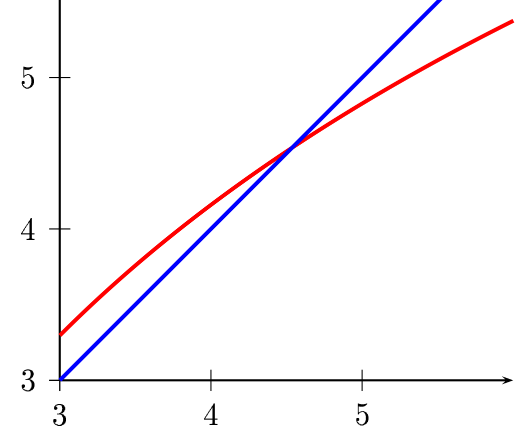
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \alpha\| \leqslant \left(\frac{k^n}{1-k}\right)\|u_1 - u_0\|$$

5.3 Exemple en dimension 1

Dans cette partie nous considèrons $E = \mathbb{R}$. Nous allons appliquer le théorème du point fixe pour la résolution de l'équation

$$x = 3ln(x) \qquad (3)$$





5.3.1 Graphiquement

On voit graphiquement que l'équation (3) admet deux solutions notées a (la solution de droite) et b (la solution de gauche). En utilisant les itérations de point fixe et en prenant $x_0 = 3$ on converge vers la solution de droite. On peut vérifier que quelque soit le point initial x_0 on atteindra jamais la solution de gauche. Pour l'obtenir on prend l'équation inverse de (3), c'est à dire $x = e^{\frac{x}{3}}$.

5.3.2 Calcul

On applique le théorème du point fixe local. Il faut trouver un intervalle fermé I stable par f et sur lequel f est contractante. Pour cela on utilise le résultat suivant :

Proposition 5.7. *Si f est de classe C^1 sur un intervalle I, alors on a*

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant \left(\sup_{s \in I} |f(s)| \right) .|y - x|$$

En appliquant cette proposition on montre qu'on peut appliquer le théorème du point fixe local à la fonction $f(x) = 3ln(x)$ sur $I = [3.1, +\infty[$. On obtient ainsi la solution de droite b.

5.3.3 Programme Maple

```
> ptfixe:=proc(f,nmax::posint,tol::numeric,x0::numeric)
> local x,xanc,n;
> x:=x0;n:=0;
> label_1:
> xanc:=x;
> x:=evalf(f(x));
> if ((evalf(abs(x-xanc)) < tol) or (n > nmax)) then
> print("La méthode a convergée");
> else
> n:=n+1;
> goto(label_1);
> fi;
> printf("Nombre d'itérations: %d\nL'approximation de a \ à %f
> est: %f",n,tol,x);
> end proc;
```

Approximation de b

```
> f:=x->3*log(x);
> ptfixe(f,10,0.0001,3);
```

$$f := x \to 3\log(x)$$

"La méthode a convergée"

```
Nombre d'it\'erations: 11

L'approximation de b à .000100 est: 4.514026
```

Approximation de a

```
> f:=x->exp(x/3);
> ptfixe(f,10,0.0001,1);
```

$$f := x \to e^{(1/3\,x)}$$

"La méthode a convergée"

```
Nombre d'it\'erations: 11

L'approximation de a à .000100 est: 1.855222
```

6 Résolution des systèmes linéaires

6.1 Introduction

La résolution de grands systèmes (linéaires et non linéaires) est pratique courante de nos jours, spécialement en Génie civil, Génie Mécanique et Construction, Génie Mécanique et Développement, Génie Electrique, et de façon générale, dans tous les domaines où l'on s'intéresse à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.
Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution des systèmes linéaires de n équations n inconnues :

$$Ax = b \qquad (4)$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n ($A \in M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), x et b sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

On rappelle que si le déterminant de A est non nul, le système est dit de Cramer et la solution existe et est unique. Dans ce cas, la solution x peut être déterminée par la méthode des déterminants : $x_i = \dfrac{det(B_i)}{det(A)}$ où B_i est la matrice obtenue en remplaçant la ième colonne de A par le vecteur colonne b du second membre du système. Cette méthode n'est pas satisfaisante car elle suppose le calcul de $n+1$ déterminants, et le calcul d'un déterminant est très coûteux. Si D_n est le nombre d'opérations à effectuer pour le calcul d'un déterminant d'ordre n, alors $D_n = nD_{n-1} + n > n!$.

Un cas particulièrement simple de système de Cramer est celui des matrices triangulaires avec une trace non nulle (pour mémoire, le déterminant d'une matrice A triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux).

Pour le cas général d'un système linéaire de n équations à n inconnues, il existe deux types de méthodes :

– les méthodes directes
– les méthodes itératives

Les méthodes directes permettent d'obtenir la solution exacte d'un système en un nombre fini d'étapes :

– Le procédé d'élimination de Gauss
– Méthode de Choleski
– Décomposition LU
– Méthode de Crout ...

Les méthodes itératives consistent à générer une suite de vecteurs qui converge vers la solution du système

– Méthode de Jacobi
– Méthode de Gauss
– Méthode de relaxation

6.2 Principe des méthodes itératives

Dans ce chapitre on ne s'intéressera qu'aux méthodes itératives de Jacobi et de Gauss Seidel.

Le principe des méthodes itératives est basé sur l'écriture de la matrice A sous la forme

$$A = M - N$$

où M et N sont deux matrices carrées d'ordre n. M est une matrice inversible ($det(M) \neq 0$) à choisir de telle façon à ce que M^{-1} se calcule facilement. En général on la choisit triangulaire.

Dans ce cas le système linéaire (4) devient

$$Mx = Nx + b$$

ce qui est équivalent à

$$x = Ex + d \tag{5}$$

avec $E = M^{-1}N$ et $d = M^{-1}b$.
Le problème (5) est alors un problème de point fixe, du type $x = f(x)$, avec $f : x \in \mathbb{K}^n \to f(x) = Ex + d \in \mathbb{K}^n$

THÉORÈME 6.1. *La suite itérée de $\mathbb{K}^n$ définie par*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{K}^n \\ x^{k+1} = Ex^k + d \end{cases}$$

converge vers l'unique solution de (5) *pour tout $x^0 \in \mathbb{K}^n$ et donc vers l'unique solution* (4) *si et seulement si $\rho(E) < 1$.*

6.3 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi consiste à prendre

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad et \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $E = M^{-1}N = I - M^{-1}A = J$, avec

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice J s'appelle matrice d'itération de Jacobi.

- La méthode n'est donc applicable que si $a_{ii} \neq 0$, pour $i = 1, 2, \dots, n$.
- La méthode converge si et seulement si $\rho(J) < 1$.

Les itérations de la méthode de Jacobi sont, d'après le théorème 6.1

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^k \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

6.4 Programme Maple

```
#===================================================
# D\'eclaration des variables globales et chargement
```

```
# des packages n\'ecessaires
#================================================
restart:
with(linalg):
n:=100:
f:=(x,y)->evalf(1/(x+y)):
A:=Matrix(n,n,f): # Cr\'eation d'une matrice à diag. strictement dominante
for i from 1 to n do A[i,i]:=A[i,i]+100: od:
B:=Vector(n,1);
X:=Vector(n,0): # A initialiser !
A1 := array(1..n,1..n):
B1 := array(1..n):
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do A1[i,j] := A[i,j]: od:
B1[i] := B[i]:
X1[i] := X[i]:
od:
epsilon:=10^(-6): # Pr\'ecision recherch\'ee
itermax:=1000: # Nombre max d'it\'erations
#==========================================================
# M\'ethode de Jacobi
#==========================================================

Jacobi:=proc(AA,BB,nn)
# R\'esolution de AX=B par la m\'ethode de Jacobi. J'ai mis 2 conditions
# suffisantes de sortie : "|Xn-Xn+1|<epsilon" et "convergence trop lente"
global epsilon,itermax;
local XXX,i,j,k,s,erreur,Xprime;
Xprime:=vector(nn,0):
XXX := vector(nn,0):
erreur:=2:
for k from 1 to itermax while erreur>epsilon do
for i from 1 to nn do
s:=evalf(BB[i]):
for j from 1 to nn do if i<>j then s:=s-AA[i,j]*XXX[j]: fi: od:
Xprime[i]:=s/AA[i,i]:
od:
erreur:=norm(evalm(Xprime-XXX),2):
for i from 1 to nn do XXX[i]:=Xprime[i]: od: # Mise à jour du vecteur d'it\'e
od:
if erreur<epsilon # Affichage des r\'esultats
then print(cat(`AX-B = `,evalm(AA&*XXX-BB)));
print(cat(`Nombre d'it\'erations : `,k));
else print(cat(`Pas convergence en `,itermax,` it\'erations`));
fi:
end:
#========================
# Ex\'ecution
```

```
#========================
t:=time(): Jacobi(A1,B1,n); Temps_mis_par_Jacobi:=time()-t;
```

6.5 Méthode de Gauss Seidel

La méthode de Gauss-Seidel repose sur la constatation que l'itération dans la méthode de Jacobi nécessite, pour calculer x_i^{k+1} , tous les éléments $(x_j^k)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$. Pourquoi ne pas utiliser, à la place de ces éléments les éléments $(x_j^{k+1})_{1\leqslant j\leqslant i-1}$, fraîchement calculés ?Cette méthode correspond au choix de décomposition de la matrice comme suit

$$A = D - E - F$$

avec D est la matrice diagonale, $-E$ est la partie inférieure de A et $-F$ la partie supérieure. Dans ce cas $M = D - E$ et $N = -F$ et la matrice, dite d'itération de Gauss Seidel, est $G = (D-E)^{-1}F$.

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

6.6 Programme Maple

```
#==================================================
# M\'ethode de Gauss-Seidel
#==================================================
GaussSeidel:=proc(AA,BB,nn)
global epsilon,itermax;
local XXX,i,j,k,s,erreur;
XXX := vector(nn,0):
erreur:=2:
for k from 1 to itermax while erreur>epsilon do
for i from 1 to nn do
s:=evalf(BB[i]):
for j from 1 to nn do if i<>j then s:=s-AA[i,j]*XXX[j]: fi: od:
XXX[i]:=s/AA[i,i]:
od:
erreur:=norm(evalm(AA&*XXX-BB),2):
od:
if erreur<=epsilon
then print(cat(‘AX-B = ‘,evalm(AA&*XXX-BB)));
print(cat(‘Nombre d’it\’erations : ‘,k));
else print(cat(‘Pas convergence en ‘,itermax,‘ it\’erations‘));
fi:
end:
#========================
# Execution
#========================
t:=time(): GaussSeidel(A1,B1,n); Temps_mis_par_GaussSeidel:=time()-t;
```

7 Exercices

Exercice 1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = \max(\sqrt{x^2 + y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.

2. Montrer que $N_2 \leqslant \| \cdot \|_\infty \leqslant \| \cdot \|_2 \leqslant N_1 \leqslant \| \cdot \|_1 \leqslant 4N_2$

3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$, tel que $\| \cdot \|_1 \leqslant kN_2$(utiliser Cauchy-Schwarz).

Exercice 2 (Normes de polynômes)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|), \quad \|P\|_* = \max_{1 \leqslant t \leqslant 1} |P(t)|$$

Montrer qu'elles sont des normes et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. (On considérera $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + t^2 + \ldots t^n$)

Exercice 3

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ pour que $(x, y) \to f(d(x, y))$ soit une distance sur E.

2. Montrer que l'application d_2 définie sur $E \times E$ par $d_2(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est une distance sur E. Si la distance d est associée à une norme, est-il de même pour d_2.

3. Comparer les distances d et d_2.

Exercice 4

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues définies sur $I = [0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit sur E trois normes en posant respectivement, pour tout $f \in E$:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|; \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx, \; N_2(f) = N_1(f) + N_\infty(f)$$

a. Montrer que N_∞ et N_2 sont équivalentes.

b. Montrer que N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 5

Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues définies sur $I = [-1,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que $(E, \| \, \|)$ n'est pas complet, en considérant la suite f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 6

On considère l'espace vectoriel E des fonctions de classe C^2 sur $[0, 2\pi]$ et vérifiant : $\forall f_i n E, f(0) = f'(0) = 0$.

1. On pose pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f''(x)|$$

$$N_2(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) + f''(x)|$$

$$N(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

   Montrer que N_1, N_2 et N sont des normes sur E.

2. Montrer N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes.
3. Montrer N_1 et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 7

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n $\| \, \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que $\||A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

1. Montrer que si S est une matrice symétrique réelle de $M_n(\mathbb{R})$ et si m (respectivement M) designent la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de S alors :

   a. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}, \dfrac{{}^txSx}{{}^txx} \in [m, M]$

   b. $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}, \dfrac{{}^tx_0Sx_0}{{}^tx_0x_0} = M$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

b. Montrer que $|||A\,\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.
Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 8

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \text{ et } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

Exercice 9

Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

3. $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

4. $f(x,y) = y - x^2$, si $y > x^2$ $\quad f(x,y) = 0$ si $y \leqslant x^2$

5. $f(x,y) = y + x^2$, si $y > x^2$ $\quad f(x,y) = 0$ si $y \leqslant x^2$

6. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^4}{x^4+y^4}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

7. $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^4+y^6}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

8. $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

9. $f(x,y) = e^{x/y}$, si $y \neq 0$ $\quad f(x,y) = 0$ si $y = 0$

Exercice 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$$

On conidère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$

1. Montrer que L est une application linéaire.

2. En considérant les fonctions $f_n : x \in [-1,1] \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

Exercice 11

Appliquer le théorème du point fixe aux fonctions suivantes dans leur intervalle I (à trouver) :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} & g(x) &= e^{\frac{x}{3}} \\ h(x) &= \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \quad (a > 0) & e(x) &= kln(x) \end{aligned}$$

Exercice 12

On considère la fonction

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow && \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto && F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ & && \quad\quad\quad = (x^2 - y^2 + 0.1, x^3 - y^3 + 0.1) \end{aligned}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infine.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel positif r tel que F soit contractante sur la boule fermée $\bar{B}(O,r)$

2. Monrer que $\bar{B}(O,r)$ est stable par F.

3. Appliquer le théorème du point fixe pour la résolution du système non linéaire

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0.1 \\ y = x^3 - y^3 + 0.1 \end{cases}$$

Exercice 13

Montrer que le système

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$$

admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Exercice 15. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\dfrac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leqslant \frac{2}{n}$$

et en déduire que (f_n) est une suite de Cauchy.

3. Supposons qu'il existe une fonction $f ß E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|dt = 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que

$$\begin{cases} f(t) = -1 & \forall t \in [-1, 0[\\ f(t) = 1 & \forall t \in]0, 1] \end{cases}$$

Conclure.

Exercice 14

Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application

$$\begin{array}{rcccl} F: & E & \longrightarrow & & E \\ & u & \longmapsto & F(u) & / \quad F(u)(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \frac{tu(t)}{1+t^2}dt \\ & & & & \forall x \in [-1, 1] \end{array}$$

1. Montrer que F est contractante sur E.
2. Trouver la solution y de l'équation $y = F(y)$ en dérivant par rapport à x.
3. On considère, dans E, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 & \forall x \in [-1, 1] \\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

   a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 puis u_n.

b. En étudiant les fonctions $u_0 - y$, $u_1 - y$ puis $u_n - y$ calculer $\|u_0 - y\|_\infty$, $\|u_1 - y\|_\infty$, $\|u_n - y\|_\infty$. En déduire que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ln2)^k}{k!} = 2$$

Exercice 15

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour la résolution du système $Ax = b$, la méthode de Jacobi diverge tandis que celle de Gauss Seidel converge.

2. Montrer qu'on obtient le résultat inverse avec la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$