Université de Rennes 1 Master 1
Année 2011-2012 ARCB

Examen terminal

Lundi 12 décembre 2011
Durée 2h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soit $\mathcal{H} = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire, $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$. On note $e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$. On pose $M := \{f \in \mathcal{H} \,|\, \langle f, e_n\rangle = 0, \text{ pour tout } n < 0\}$.

1. Montrer que M est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de M.
2. Déterminer les projections orthogonales sur M de $f(x) = \dfrac{1}{2-e^{ix}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-2e^{ix}}$.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on considère $\Phi_z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, définie par $\Phi_z(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle z^n$.
   Montrer que Φ_z est bien définie. Justifier l'existence de l'unique $f_z \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi_z(f) = \langle f, f_z\rangle$ pour tout $f \in \mathcal{H}$. Déterminer f_z.

Exercice 2.

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3|x|}$ est intégrable. Calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy)}{9+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3}f(y)$.
3. Soit g une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{9+t^2}$.
   Montrer que g est bornée, puis majorer pour $x > 1$, $\left|g(x) - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\right|$.
   En déduire que $g \in L^2(\mathbb{R})$, mais n'est pas un élément de $L^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour $y \neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n g(x)\sin(xy)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xy)}{(9+x^2)y}\,dx$.
   En déduire la transformée de Fourier-Plancherel $\mathscr{F}(g)$.

Exercice 3. Soit $P(z) = z^{81} + 3z^{60} + 1$.

1. Montrer que P a 60 racines toutes distinctes (i.e. de multiplicité 1) dans $D(0,1)$.
2. Montrer que les autres racines sont dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Tourner la page s.v.p.

Exercice 4. Soit $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$.

1. Déterminer le développement en série de Laurent de f dans les couronnes :
   (a) $0 < |z| < 1$
   (b) $|z| > 1$
2. Calculer $\displaystyle\int_{C^+(0,4)} f(z)\,dz$

Exercice 5. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$.
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que :
$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $f(\mathcal{H}^+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \geq 0\}$.
Soit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(z) = f(z)$ si $z \in \mathcal{H}^+$ et $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $z \notin \mathcal{H}^+$.
Montrer que g est une fonction entière et que $\left|\dfrac{1}{1+g}\right| \leq 1$.
En déduire que f est constante.

Exercice 6.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt$. On pose $I = \{a \in \mathbb{R} \mid F(a) < \infty\}$.
   Montrer que I est un intervalle, que l'on déterminera.
2. Déterminer les singularités de $g(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ ainsi que les résidus en ces points.

   En intégrant g, en déduire que pour tout $a \in I$: $F(a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$.
3. On suppose maintenant que $a \in \mathbb{C}$. On pose $U = \{a \in \mathbb{C} \mid \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{at}}{1+e^t}\right| dt < \infty\}$.
   Déterminer U. En déduire que $F(a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$ pour tout $a \in U$.
4. Soit $a = \alpha + i\beta$ un point de U. Soit $r = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$.
   Montrer que la série entière $$\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n e^{at}}{1+e^t}\,dt \qquad (1)$$
   converge dans le disque $D(0,r)$.
   En déduire que le développement en série entière de $\dfrac{\pi}{\sin(z\pi)}$ dans $D(a,r)$ est donné par (1)

Exercice 7.

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-n|x|}+\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^*}(x)\right)dx$
   où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^*}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.
2. Montrer que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{|\cos(x)|}{1+x^2+y^2}\,dx$ est de classe C^1.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes le long du cercle unité :

1. $\displaystyle\int_{C^+(0,1)}\frac{dz}{\cos z}$.
2. $\displaystyle\int_{C^+(0,1)}\frac{dz}{z^2+2z}$.

Exercice 9. Soit la fonction $f(x,y)$ définie sur $[-1,1]\times[-1,1]\setminus\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. Les fonctions partielles $x\mapsto f(x,y)$ et $y\mapsto f(x,y)$ sont-elles intégrables ?
2. Calculer $\int_{-1}^{1}f(x,y)\,dx$ et $\int_{-1}^{1}f(x,y)\,dy$.
   La fonction f est-elle intégrable sur $[-1,1]\times[-1,1]$?

Exercice 10. 1) Soit $\mathcal{H}^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathfrak{Im}(z)\geq 0\}$. Soit $f:U\to\mathbb{C}$ une fonction continue où U est un ouvert contenant $\mathcal{H}^+$. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty}|f(z)|=0$.

Soit γ_R le demi cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans $\mathcal{H}^+$ (orienté dans le sens positif).

Soit $a>0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}e^{aiz}f(z)\,dz=0$.

2) Calculer la transformée de Fourier de $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$.

Exercice 11.

1. Montrer $|1-\frac{1}{2}z|^2-|\frac{1}{2}-z|^2=\frac{3}{4}(1-|z|^2)$.
   En déduire que si $|z|\leq 1$ alors $\left|\dfrac{\frac{1}{2}-z}{1-\frac{z}{2}}\right|\leq 1$.
2. Soit f holomorphe sur un ouvert Ω contenant le disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$.
   On suppose que pour tout $z\in D(0,1)$, $|f(z)|\leq 1$ et $f(\frac{1}{2})=0$.
   Montrer que $|f(\frac{3}{4})|\leq\frac{2}{5}$.
   Indication : On pourra considérer la fonction $g(z)=f(\frac{1-2z}{2-z})$.

Exercice 12.

1. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $D(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et pour $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq 1$.

   Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} \text{ si } z \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } z = 0 \end{cases}$

   est holomorphe sur $D(0,1)$.
2. En considérant, pour $0 < r < 1$, $\sup_{|z|=r} |g(z)|$
   montrer que $|f(z)| \leq |z|$, pour tout $z \in D(0,1)$.

Exercice 13.

1. On pose $\phi(z) = \dfrac{1+2z}{2+z}$.
   Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $|\phi(e^{i\theta})| = 1$.
   En déduire que si $|z| < 1$ alors $|\phi(z)| < 1$.
2. Soit f holomorphe sur un ouvert Ω contenant le disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$.
   On suppose que pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq 6$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$.
   Montrer que $|f(0)| \leq 3$.
   Indication : On pourra considérer la fonction $g(z) = \frac{1}{8} f(\phi(z))$.

Exercice 14. Calculer par la méthode des résidus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3+e^{ix}}{2+e^{ix}} \frac{1}{4+x^2}\, dx$.

Exercice 15. On rappelle que $cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ et $sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

1. Déterminer $cosh(z + i\pi)$ et $cosh(z + 2i\pi)$.
   Montrer que $|cosh(z)|^2 = sinh^2(x) + \cos^2(y)$ où $x = \mathfrak{Re}(z)$ et $y = \mathfrak{Im}(z)$
   En déduire les zéros de la fonction $cosh$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|\mathfrak{Re}(a)| < 1$
   Calculer par la méthode des résidus l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{cosh(x)}\, dx.$$