ut couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ $a < b$, on note $C^\infty([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et ıt dérivables sur cet intervalle.
notera i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Première partie.

On considère la fonction φ_0 définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\text{pour } u \neq 0 \qquad \varphi_0(u) = \frac{u}{e^u - 1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(0) = 1.$$

1° Montrer que φ_0 est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$. Tracer la représentation graphique de φ_0 dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

2° Démontrer que la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\psi(u) = \varphi_0(u) - 1 - u\varphi_0'(0)$$

est une fonction paire.

Établir l'identité

$$\text{pour tout } u \neq 0 \qquad \varphi_0(u) = \frac{u}{2}\left(\coth\frac{u}{2} - 1\right).$$

Deuxième partie.

A) 1. — Étant donnés deux entiers n et p tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, on pose

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

Montrer rapidement que $S_p = \lim\limits_{n\to\infty} S_p(n)$ existe et établir les inégalités $1 \leqslant S_p \leqslant 1 + \dfrac{1}{p-1}$.
En déduire la limite de la suite $(S_p)_{p\geqslant 2}$.

A) 2. — On considère la série entière $f(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dfrac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} t^{2p}$.
Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

On note alors $f_N(t) = \sum\limits_{p=0}^{N} (-1)^p \dfrac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} t^{2p}$ la somme des $N + 1$ premiers termes de la série $f(t)$.

Montrer que $f_N(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{t^2 + n^2\pi^2} + (-1)^N \left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{2N+2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2N+2}(t^2 + n^2\pi^2)}$.

En déduire que pour tout t fixé, $|t| < R$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2\pi^2}.$$

B) 1. — Démontrer que pour tout réel α et tout entier p

$$\operatorname{sh}(2p+1)\alpha = \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^{2q+1} (\operatorname{ch}\alpha)^{2p-2q} (\operatorname{sh}\alpha)^{2q+1}.$$

En déduire l'existence, pour tout entier naturel p, d'un polynôme R_p de $\mathbf{R}[X]$ tel que

$$R_p(\operatorname{th}\alpha) = \frac{\operatorname{sh}(2p+1)\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha)^{2p+1}}.$$

B) 2. — Montrer que les zéros de R_p sont tous simples et sont les images dans **C** du segment $[-p\,;p]$ de **Z** par application définie par

$$n \longmapsto z_n\,; \quad z_n = i \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2p+1}.$$

En déduire que $\dfrac{R'_p(X)}{R_p(X)} = \dfrac{1}{X} + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \dfrac{2X}{X^2 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{n\pi}{2p+1}}$.

B) 3. — Montrer que

$$R'_p(\operatorname{th}\alpha) = \frac{2p+1}{(\operatorname{ch}\alpha)^{2p}}\left[\operatorname{ch}(2p+1)\alpha \,.\, \operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}(2p+1)\alpha \,.\, \operatorname{sh}\alpha\right]$$

puis que, si $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$,

$$\left(\coth x - \operatorname{th}\frac{x}{2p+1}\right)\operatorname{ch}^2\frac{x}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\coth\frac{x}{2p+1} + \frac{1}{2p+1}\sum_{n=1}^{p}\frac{2\operatorname{th}\dfrac{x}{2p+1}}{\operatorname{th}^2\dfrac{x}{2p+1} + \operatorname{tg}^2\dfrac{n\pi}{2p+1}}.$$

B) 4. — Pour tout couple $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$, $(x, n) \neq (0, 0)$, on considère la suite $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$

pour tout $p < n \qquad u_p = 0,$

pour tout $p \geqslant n \qquad u_p = \dfrac{1}{2p+1}\,\dfrac{2\operatorname{th}\dfrac{x}{2p+1}}{\operatorname{th}^2\dfrac{x}{2p+1} + \operatorname{tg}^2\dfrac{n\pi}{2p+1}}.$

a) Établir la convergence de u. Préciser sa limite en fonction de (x, n).

b) Si, de plus, $n \neq 0$, démontrer que, pour tout p, on a l'inégalité

$$|u_p| \leqslant \frac{2|x|}{n^2\pi^2}.$$

c) Toujours pour $n \neq 0$ on considère la suite $A : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$

pour tout $p \qquad A_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_p.$

Montrer que la suite A est convergente et que sa limite est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

d) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

B) 5. — Montrer enfin que φ_0 est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$ et que

$$\varphi_0(u) = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{S_{2n}\,.\,u^{2n}}{\pi^{2n}\,.\,2^{2n-1}}.$$

Dans toute la suite on posera $\beta_n = (-1)^{n-1}\dfrac{(2n)\,!\,S_{2n}}{\pi^{2n}\,.\,2^{2n-1}}$.

Troisième partie.

1° On considère la fonction φ_x définie sur **R**, pour x fixé dans **R**,

$$\text{pour } u \neq 0 \qquad \varphi_x(u) = \frac{ue^{ux}}{e^u - 1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_x(0) = 1.$$

Montrer que φ_x est continue sur **R** et développable en série entière pour $|u| < 2\pi$; on note

$$\varphi_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{u^n}{n!}.$$

Établir la relation de récurrence

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{q=2}^{n+1} C_{n+1}^q \, B_{n+1-q}(x).$$

2° Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

a) B_n est un polynôme de degré n en x.

b) $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \neq 1$ (on pourra comparer φ_0 et φ_1).

c) $B_{2n}(0) = \beta_n$ et $B_{2n+1}(0) = 0$ pour tout entier $n > 0$.

En déduire une relation de récurrence entre les β_n.

d) $B'_{n+1} = (n+1)B_n$.

3° Déduire de cette étude :

a) B_k pour $0 \leqslant k \leqslant 6$.

b) β_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.

En déduire les valeurs de S_2, S_4 et S_6.

4° On pose maintenant

$$C_0(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad C_n(x) = \frac{1}{n+1}[B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)].$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$C'_{2n-1} = (2n-1)C_{2n-2} \qquad \text{et} \qquad C'_{2n} = 2nC_{2n-1} + \beta_n.$$

Établir, par récurrence sur n, la propriété suivante, vraie pour $n \geqslant 1$:

$$(P_n) \quad \begin{cases} C_{2n-1} \text{ garde un signe constant sur }]0, 1[\\ C_{2n} \text{ s'annule une seule fois sur }]0, 1[\end{cases}$$

(On remarque que les C_n s'annulent en 0 et en 1.)

Quatrième partie.

On note $(C_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de polynômes vérifiant les propriétés du paragraphe 3.4. La forme explicite des C_n, pour $n \geqslant 1$, n'intervient pas dans cette partie.

Étant donné une fonction $f \in C^\infty([0, 1])$, on pose

$$I_n(f) = \int_0^1 C_{2n}(x) f^{(2n+2)}(x)\, dx,$$

$f^{(2n+2)}$ est la dérivée $(2n+2)^{\text{ième}}$ de f.

1° Calculer $I_0(f)$.

2° Montrer que si $n \geqslant 1$

$$I_n(f) = 2n(2n-1)I_{n-1}(f) - \beta_n[f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(0)].$$

(*) Suite voir page 7 -

3° Montrer que, pour tout n, il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que

$$I_n(f) = \frac{\beta_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} f^{(2n+3)}(\xi).$$

On pourra appliquer le théorème de la moyenne à

$$\int_0^1 C_{2n+1}(x) \, . \, f^{(2n+3)}(x) \, . \, dx$$

en tenant compte de la propriété (P_{n+1}) du 4° de la troisième partie.

4° Déduire des résultats précédents que

a) Si $f \in C^\infty([0, 1])$, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}[f'(0) + f'(1)] - \sum_{q=1}^{n} \frac{\beta_q}{(2q)!}[f^{(2q)}(1) - f^{(2q)}(0)] - \frac{\beta_{n+1}}{(2n+2)!} f^{(2n+3)}(\xi).$$

b) Si $g \in C^\infty([a, b])$, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[g(a) + g(b)] - \sum_{q=1}^{n} \frac{\beta_q}{(2q)!}(b-a)^{2q}[g^{(2q-1)}(b) - g^{(2q-1)}(a)] - \frac{\beta_{n+1}}{(2n+2)!}(b-a)^{(2n+3)} g^{(2n+2)}(\xi).$$

5° *Application numérique.*

On considère les intervalles $[k, k+1]$ $k \in \{10, 11, \ldots, 19\}$, l'entier $n = 2$ et la fonction g donnée par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On donne $\beta_1 = \dfrac{1}{6}$, $\beta_2 = -\dfrac{1}{30}$, $\beta_3 = \dfrac{1}{42}$, donner un majorant de la différence

$$\operatorname{Log} 2 - \left(\frac{1}{20} + \sum_{q=11}^{19} \frac{1}{q} + \frac{1}{40} - \frac{1}{1\,600} + \frac{1}{128 \, . \, 10^4}\right).$$

C.A.P.E.S.

Première composition de mathématiques.

PRÉAMBULE.

6241. Il est expressément demandé aux candidats de traiter d'abord les première et deuxième parties. De traiter ensuite la quatrième partie en admettant les résultats de la troisième, et de ne justifier ces derniers que s'ils disposent encore de temps à la fin de l'épreuve.

Dans tout le problème **N**, **Z**, **R** désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des réels. On désigne par C_n^p $(n, p) \in \mathbf{N}^2$ $p \leqslant n$ et $0 < n$ le coefficient de x^p dans le développement de $(x+1)^n$.