Théorème de Schroeder-Bernstein

Théorème : S'il existe une injection $f: A \to B$ et une injection $g: B \to A$, alors il existe une bijection de $A \to B$.

Démonstration : Soit $C = gf(A)$. En rebaptisant B l'image $g(B)$, on a la situation du sandwich suivante : $C \subseteq B \subseteq A$.

A est équipotent à C par une bijection $h: A \to C$.

Notons E l'ensemble :

$$E = \left\{ e \in B \mid \exists x \in B - C, \exists n \in \mathbb{N} \ \left(\underset{n}{h \cdots h}(x) = e \right) \right\}$$

Définissons h′

$$h': B \to C \ par \begin{cases} h'(x) = h(x) & si\ x \in E \\ h'(x) = x & si\ x \in B - E \end{cases}$$

Montrons que h' est une bijection $B \to C$

Tout d'abord h' prend bien ses valeurs dans C.

Montrons que h' est injectif.

Il faut montrer que : $\forall x, y \in B\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Si $h'(x) = h'(y)$ on a

- Soit $h'(x) \in B - E$ *Correspond au cas où $h'(x) = x$*
- Soit $h'(x) \in E$ *Si $h'(x) \notin B - E$ alors $h'(x) \in C - (B - E)$ et comme $C \subseteq B$ on a $h'(x) \in C - (B - E) \Leftrightarrow h'(x) \in E$*

Si $h'(x) \in B - E$

Dans ce cas on a $x, y \in B - E$ donc $x = h'(x) = h'(y) = y$

Si $h'(x) \in E$

Dans ce cas on a $x, y \in E$ donc $h(x) = h'(x) = h'(y) = h(y)$.

Comme h est injectif, on a bien $x = y$.

1) **Montrons que h' est surjectif.**

Il faut montrer que : $\forall z \in C\ \exists x \in B\ \left(z = h'(x)\right)$

Soit $z \in C$.

Si $z \in B - E$

Alors $z = h'(z)$.

Si $z \in E$

Alors il existe $x \in B - C$ tel que $z = \underset{n}{h \cdots h}(x)$, avec $n > 0$ car $z \notin B - C$. ?

Si $y = \underset{n-1}{h \cdots} h(x)$, alors $z = h(y) = h'(y)$ avec $y \in E$.

Conclusion

Comme il existe une bijection de $h : A \to C$ et une bijection $h' : B \to C$ alors il existe une bijection de $A \to B$.

□