Triangle glissant

Problème

On découpe un triangle en morceaux polygonaux. Puis, en translatant indépendamment chacun de ces morceaux, on reconstitue un nouveau triangle. Prouver que le nouveau triangle est un translaté du premier.

Solution

Définition : Soit T un triangle. Un découpage est une famille de polygones $\mathcal{D}$ vérifiant :

(i) $T = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{D}} P$,

(ii) l'intersection de deux polygones distincts de $\mathcal{D}$ est soit vide soit la réunion finie de segments d'arêtes.

Soit T' un triangle. On dira que T' est l'image d'un triangle T par une D-opération s'il existe deux découpages $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de T et T' respectivement, ainsi qu'une bijection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ envoyant tout polygone sur un translaté.

Le problème est donc de montrer le résultat suivant :

Théorème : Si un triangle est l'image d'un second triangle par une D-opération, alors l'un est un translaté de l'autre.

Pour cela, introduisons quelques définitions préliminaires :

Définition : Un polycône est une réunion finie de semi-cones fermés centrés à l'origine.

On définit sur l'ensemble des polycones l'opération [1] $P_1 \oplus P_2 = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(P_1 \Delta P_2))$.

Lemme 1 : L'opération $\oplus$ est commutative et associative.

Preuve : Tout d'abord, $\oplus$ est commutative puisque la différence symétrique l'est ellemême. Soient ensuite P_1, P_2, P_3 trois polycones et montrons que $P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3) = (P_1 \oplus P_2) \oplus P_3$.

Pour cela, remarquons que $P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3 \Delta D))$ où D est un ensemble fini de semi-droites ; plus précisément, D est formé des demi-droites constituant $\partial P_3 \cap \partial P_2$ et $\partial \mathrm{int}(P_3 \cap P_2)$. De la même manière, $(P_1 \oplus P_2) \oplus P_3 = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3 \Delta D'))$ où D' est l'ensemble (fini) des demi-droites constituant $\partial P_1 \cap \partial P_2$ et $\partial \mathrm{int}(P_1 \cap P_2)$.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que pour toute réunion de demi-droites A (passant par l'origine) et pour toute demi-droite D (passant par l'origine), $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A \Delta D)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$. Dès lors, nous pourrons dire que

$$P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3)) = (P_1 \oplus P_2) \oplus P_3$$

1. Ici, cl et int représentent respectivement l'adhérence et l'intérieur.

Pour cela, il nous faut distinguer trois cas. Si $A \cap D = \{0\}$, $\text{int}(A\Delta D) = \text{int}(A \cup D) = \text{int}(A)$. Si $D \subset \partial A$, $\text{int}(A\Delta D) = \text{int}(A \backslash D) = \text{int}(A)$. Si $\text{int}(A) \cap D \neq \emptyset$, $\text{int}(A\Delta D) = \text{int}(A\backslash D) = \text{int}(A)\backslash D$ d'où $\text{cl}(\text{int}(A\Delta D)) = \text{cl}(\text{in}(A)\backslash D) = \text{cl}(\text{int}(A))$. $\square$

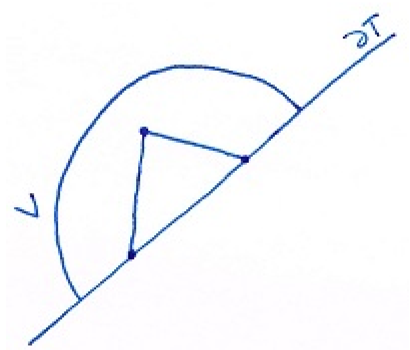
Définition : Un angle d'un polygone définit naturellement un semi-cône que l'on centre à l'origine par translation ; on parle d'angle plein (qui est un polycône particulier).

Si P est un polygone, la somme (par rapport à $\oplus$) des angles pleins associés s'appelle le polycône de P, noté $\mathcal{PC}(P)$. On peut ainsi définir le polycône d'un découpage $\mathcal{D}$ par $\mathcal{PC}(\mathcal{D}) = \bigoplus\limits_{P \in \mathcal{D}} \mathcal{PC}(P)$.

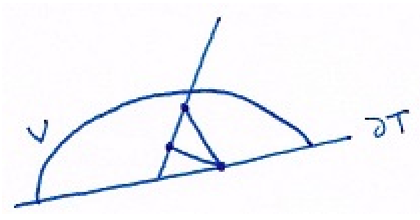
Définition : Un découpage d'un triangle est dit adapté si :
(i) le nombre de sommets du découpage intérieurs au triangle est pair,
(ii) le nombre de sommets du découpage intérieurs à chacune des arêtes du triangle est pair.

Lemme 2 : Tout découpage d'un triangle admet un découpage adapté plus fin.

Preuve : Soit $\mathcal{D}$ un découpage d'un triangle T. Supposons que le nombre de sommets du découpage intérieurs au triangle est impair. Considérons un polygone P du découpage ayant une intersection non triviale avec une arête de T ; en se plaçant en un voisinage V d'un point de ladite intersection, on peut affiner le découpage comme suit :



On obtient ainsi un découpage $\mathcal{D}'$ ayant un nombre de sommets intérieurs au triangle pair. Si le nombre de sommets du découpage intérieurs à une arête du triangle est impair, on se place en un voisinage V d'un sommet du découpage sur l'intérieur d'une arête et on procède comme suit :



On remarquera que l'opération ne modifie pas la parité du nombre de sommets du découpage intérieurs au triangle. Finalement, on obtient un découpage adapté $\mathcal{D}''$ plus fin que $\mathcal{D}$. $\square$

Lemme 3 : Le polycône d'un découpage adapté coïncide avec le polycône du triangle.

Preuve : Soient T un triangle et $\mathcal{D}$ un découpage adapté. Notons X l'ensemble des points intérieurs au triangle, Y_1, Y_2, Y_3 l'ensemble des points intérieurs à chaque arête du triangle, a, b, c les sommets du triangle, et $C(x)$ l'ensemble des angles pleins adjacents à un sommet x du découpage $\mathcal{D}$. Alors

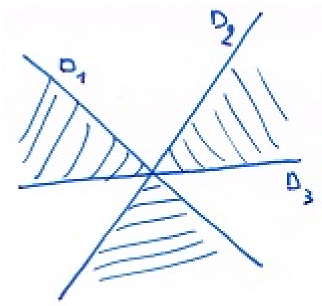
$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) = \left(\bigoplus_{x \in X} \bigoplus_{P \in C(x)} P \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1,2,3} \bigoplus_{x \in Y_i} \bigoplus_{P \in C(x)} P \right) \oplus \left(\bigoplus_{P \in C(a) \cup C(b) \cup C(c)} P \right)$$

D'abord, le troisième terme correspond au polycône $\mathcal{PC}(T)$ du triangle. Ensuite, $\bigoplus_{P \in C(x)} P$ correspond à $\mathbb{R}^2$ dans le premier terme et un demi-plan fermé dans le second (qui ne dépend que de i et non de x). Comme les ensembles X, Y_1, Y_2, Y_3 ont un cardinal pair, le découpage étant adapté, les deux premiers termes valent $\emptyset$. Ainsi, $\mathcal{PC}(\mathcal{D}) = \mathcal{PC}(T)$. $\square$

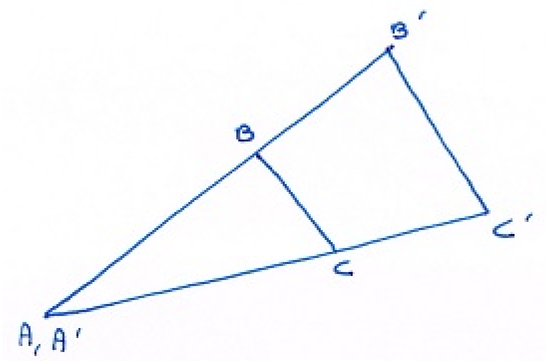
Le lemme central est le suivant :

Lemme 4 : Deux triangles ont même polycône si, et seulement si, l'un est l'image de l'autre par une transformation de la forme $t_1 \circ h \circ t_2$ où t_1, t_2 sont des translations et h une homothétie de rapport positif.

Preuve : Soit T un triangle ABC. Son polycône est de la forme :



Il existe une translation t_1 faisant coïncider un angle du triangle, disons celui basé au sommet A, avec son angle plein associé dans le polycône. Si T' est un second triangle $A'B'C'$ de même polycône, on trouve de même une translation t_2 faisant coïncider un angle de T', disons A' avec le même angle plein, de sorte que l'on obtienne une figure de la forme :



En particulier, (BC) et $(B'C')$ sont bien parallèles (puisque chacune parallèle à D_1 ici), donc si h est une homothétie centrée en l'origine de rapport $\frac{AB}{A'B'}$, alors $h(t_2(T')) = t_1(T)$, d'où $t_1^{-1} \circ h \circ t_2(T') = T$. $\square$

Preuve du théorème : Soit T' un triangle image d'un second triangle T par une D-opération ; notons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ un découpage de T et T' respectivement correspondant à cette transformation. Quitte à affiner le découpage, on peut supposer $\mathcal{D}$ adapté d'après le lemme 2. Puisque le polycône d'un polygone est invariant par translation, les découpages $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont même polycône, et on déduit du lemme 3 que T' et T ont même polycône, donc T' est l'image de T par une transformation donnée au lemme 4. Or une D-opération préserve l'aire du triangle initiale, donc l'homothétie de la transformation est nécessairement de rapport 1, c'est-à-dire que l'homothétie se confond avec l'identité. Par conséquent, T' est bien l'image de T par une translation. $\square$