

## **Considérations sur deux conjectures : la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux.**

Nous allons traiter d'une approche originale de la conjecture de Goldbach.  
Puis, dans un second temps, nous verrons qu'il nous sera nécessaire de la lier à la conjecture des nombres premiers jumeaux.  
Et dans un troisième temps de proposer une généralisation de la conjecture des jumeaux.

**Avertissement** : pour ce faire, il nous est indispensable d'inclure l'entier 1 à l'ensemble des nombres premiers.

Voici donc l'affirmation que nous allons expliciter :

***Tout entier pair  $n$  est la somme des éléments de DEUX COUPLES de nombres premiers pris deux à deux :***

$$n = p1 + p2$$

$$n = p3 + p4$$

***$p1, p2, p3$  et  $p4$  étant des nombres premiers***

**Convention** : comme on sera souvent amené à parler de deux sortes de nombres premiers, autant les différencier d'emblée:

- On nommera « ouverts » ceux qui sont immédiatement **suivis** d'un nombre premier jumeau,
- On nommera « saturés » ceux qui sont immédiatement suivis d'un entier impair non-premier.

### **I - Première approche : étude des nombres pairs simples**

Ici, la situation est facilitée par la présence nombreuse des nombres premiers jumeaux.  
On verra par la suite qu'il est aisé d'agir de même pour les autres.

#### **1 - Quelques exemples simples:**

On remarquera que les premiers entiers pairs s'écrivent tous de deux façons. (On commence par 6, mais on pourrait tout aussi bien le faire à partir de l'entier 4, à la condition d'introduire très exceptionnellement l'entier 2 à l'ensemble des nombres premiers) :

- Le nombre 6:

$$6 = 1 + 5$$

$$6 = 3 + 3$$

- Ainsi que 8:

$$8 = 7 + 1$$

$$8 = 3 + 5$$

- Et 10:

$$10 = 3 + 7$$

$$10 = 5 + 5$$

- Et ainsi de suite...

## 2 – tableaux récapitulatifs

|    |               |               |               |              |               |              |   |              |   |   |
|----|---------------|---------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---|--------------|---|---|
|    | 1             |               |               |              |               |              |   |              |   |   |
| 4  | 3             | 1             |               |              |               |              |   |              |   |   |
| 6  | 5             | 3             | 1             |              |               |              |   |              |   |   |
| 8  | 7             | 5             | 3             | 1            |               |              |   |              |   |   |
| 10 | <del>9</del>  | 7             | 5             | 3            | <del>1</del>  |              |   |              |   |   |
| 12 | 11            | <del>9</del>  | 7             | 5            | <del>3</del>  | 1            |   |              |   |   |
| 14 | 13            | 11            | <del>9</del>  | 7            | <del>5</del>  | 3            | 1 |              |   |   |
| 16 | <del>15</del> | 13            | 11            | <del>9</del> | <del>7</del>  | 5            | 3 | <del>1</del> |   |   |
| 18 | 17            | <del>15</del> | 13            | 11           | <del>9</del>  | 7            | 5 | <del>3</del> | 1 |   |
| 20 | 19            | 17            | <del>15</del> | 13           | <del>11</del> | <del>9</del> | 7 | <del>5</del> | 3 | 1 |

|    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |
|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
|    | 1  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 3  | 1  |    |    |   |   |   |   |   |   |
| 6  | 5  | 3  | 1  |    |   |   |   |   |   |   |
| 8  | 7  | 5  | 3  | 1  |   |   |   |   |   |   |
| 10 | *  | 7  | 5  | 3  | * |   |   |   |   |   |
| 12 | 11 | *  | 7  | 5  | * | 1 |   |   |   |   |
| 14 | 13 | 11 | *  | 7  | * | 3 | 1 |   |   |   |
| 16 | *  | 13 | 11 | *  | * | 5 | 3 | * |   |   |
| 18 | 17 | *  | 13 | 11 | * | 7 | 5 | * | 1 |   |
| 20 | 19 | 17 | *  | 13 | * | * | 7 | * | 3 | 1 |

Explication :

- La première colonne indique les entiers pairs
- Les autres colonnes indiquent les nombres premiers qui en composent la ou les matrices.

Exemple :

$$4 \quad 3 \quad 1 \quad ==> 4 = 3 + 1$$

$$6 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad ==> 6 = 5 + 1 ; \text{ et aussi : } 6 = 3 + 3$$

- Ont été barrés su premier tableau, et supprimés du second tableau, non seulement les non-premiers, mais aussi les nombres premiers qui leur sont associés pour obtenir la somme.

$$\text{Exemple : } 10 = 9 + 1$$

$$20 = 15 + 5$$

## 3 – transcription :

Ce constat nous permet d'écrire les entiers pairs sous forme de matrices composées des éléments des 2 couples associés.

$$6 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

**Note :** on ne manquera pas de souligner les multiples relations qui lient chaque élément aux trois autres (nous y reviendrons plus bas).

#### 4 - Une récurrence immédiate :

Pour l'heure, contentons-nous de cette observation qui est valable uniquement dans les cas simples et évidents, à savoir lorsqu'il s'agit de nombres premiers « ouverts », c'est-à-dire suivis de jumeaux:

$$\text{Supposons qu'il nous soit possible d'écrire : } n \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix},$$

$p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  étant nombres premiers, tels que :

$$\begin{aligned} n &= p_1 + p_2 \\ n &= p_3 + p_4, \end{aligned}$$

- Si tous les éléments de la matrice sont jumeaux, alors nous n'aurons aucun mal à composer la matrice de l'entier  $(n+2)$  :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 & \square \\ p_1 & \square \end{pmatrix} \quad \text{===} \quad \rightarrow \quad (n+2) \rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{===} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2+p_2 & 2+p_1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} \square & p_4 \\ \square & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{===} \quad \rightarrow \quad (n+2) \rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \quad \text{===} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2+p_3 & 2+p_3 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

**Exemple :** à partir de la matrice  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  de l'entier 6, on obtient 2 possibilités pour l'entier 8 :

$$8 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{et} \quad 8 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit donc : } \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ce qui nous donnera (après fusion) : } 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

## II – Seconde approche : étude des situations à nombres premiers « saturés »

### 1 – remarque importante :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}.$$

On remarquera que les couples  $(p_1, p_2)$  et  $(p_3, p_4)$  ne servent pas seulement qu'à l'entier  $(n+2)$ , quand c'est possible, mais à tous les entiers pairs suivants (quand c'est possible).

Illustrons cette affirmation par un exemple:

$$4 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$$

Cela nous donne :

$$6 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 14 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 20 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

Et même d'autres entiers pairs le reprennent en partie:

$$10 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 12 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & \square \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 16 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 18 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & \square \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

## 2 - Une récurrence « décalée »

Comme on vient de le voir :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} p2 & p4 \\ p1 & p3 \end{pmatrix} \Rightarrow (n+2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2+p2 & 2+p1 \\ p1 & p2 \end{pmatrix}, \text{ dans les cas où } p1 \text{ et } p2 \text{ sont des premiers "ouverts".}$$

### ***a – cas compliqués***

Par contre, dans les cas où ils sont « saturés », il faudra poursuivre l'itération à (n-2), voire à (n-a), a étant un entier pair.

De telle sorte qu'on aura :

$$(n+2) \rightarrow \begin{pmatrix} (2+p2) - a & * \\ a + p1 & * \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$(n+2) \rightarrow \begin{pmatrix} (2+p2) + a & * \\ p1 - a & * \end{pmatrix}$$

### ***b - Illustrons notre propos par quelques exemples concrets :***

#### ***- 1<sup>er</sup> exemple :***

Trouver la matrice de 22  $\rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$ , sachant que : 20  $\rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 19 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dans ce cas, l'entier 1 est « ouvert », et nous permet donc de passer du couple (1, 19) qui compose l'entier 20, au couple (3, 19) qui donne l'entier 22.

On aura une première colonne : 22  $\rightarrow \begin{pmatrix} * & 19 \\ * & 3 \end{pmatrix}$ .

Pour la seconde, les autres éléments de la matrice de 20 sont « saturés ». Si l'on devait appliquer la méthode simple, on écrirait :

$$22 \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 7 & 13 \end{pmatrix};$$

et :

$$22 \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}$$

On le voit ici, à part le couple (3, 19), aucun autre couple ne peut être retenu.

Pour trouver des couples valables, il faudra « remonter » à 18 en diminuant soit 7, soit 13.

- Si on diminue 7, on aura :  $20 \rightarrow (7, 13) \Rightarrow 18 \rightarrow (5, 13)$
- Si on diminue 13, on aura  $20 \rightarrow (7, 13) \Rightarrow 18 \rightarrow (7, 11)$ .

Ce qui donne les progressions inverses suivantes :

$18 \rightarrow (5, 13)$

$20 \rightarrow (5, 15)$ , ici le couple sert uniquement de transition

$22 \rightarrow (5, 17)$

De même :

$18 \rightarrow (7, 11)$

$20 \rightarrow (9, 11)$ , couple de transition

$22 \rightarrow (11, 11)$

Donc :  $22 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ .

Remarque : si nous combinons le couple (3, 19) à ces 2 couples, on aura 3 matrices.

Dans des cas plus compliqués, on fera de même.

### - 2<sup>ème</sup> exemple :

Comment agir avec le couple « saturé » (19, 23) de l'entier 42, afin d'obtenir la matrice de l'entier pair : 44.

$$42 \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & 41 \\ 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons déjà que le couple « ouvert » : (1, 41) nous permet de trouver 2 couples de 44 :

$$42 \rightarrow \begin{pmatrix} 41 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}; \text{ nous donne : } 44 \rightarrow \begin{pmatrix} 43 & 3 \\ 1 & 41 \end{pmatrix}$$

Mais poursuivons avec le couple saturé : (19, 23) : si l'on utilise la méthode simple, on obtiendra:

$$42 \rightarrow (19, 23);$$

$$\text{Soit donc : } 44 \rightarrow (21, 23) \rightarrow 44 \rightarrow \begin{pmatrix} * & 23 \\ * & 21 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et : } 44 \rightarrow (19, 25) \rightarrow 44 \rightarrow \begin{pmatrix} * & 25 \\ * & 19 \end{pmatrix}$$

Ces deux couples ne sont pas valables. Il nous faut donc poursuivre l'itération plus loin :

- Essayons le premier rang :

$$42 \rightarrow (19, 23) \Rightarrow 40 \rightarrow (17, 23); \text{ ou bien encore : } 40 \rightarrow (19, 21).$$

On aura donc :

$$40 \rightarrow (17, 23)$$

$$42 \rightarrow (17, 25), \text{ couple de transition}$$

D'où : 44 --> (17, 27), couple non valable

On aura de même :

40 --> (19, 24), couple de transition

42 --> (19, 23), couple de transition

D'où : 44 --> (17, 25), non valable

Dans les deux cas, ça ne marche pas.

Il faut donc pousser l'itération plus loin encore.

Pour aller plus vite, signalons que le second rang ne donnera rien, non plus.

Il faudra partir de l'entier 36.

Soit donc :

36 --> (13, 23)

et

36 --> (17, 19)

Alors :

36 --> (13, 23)

38 --> (13, 25), couple de transition

40 --> (13, 27), couple de transition

42 --> (13, 29)

Et enfin :

44 --> (13, 31) ; ça marche.

D'où :  $44 \rightarrow \begin{pmatrix} 31 & 41 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$

Par contre, le couple (17, 19) ne nous est d'aucun secours. Mais signalons qu'il nous permettra de trouver d'autres matrices, telle, par exemple, celle de l'entier 46 ---> (17, 29).

**Première conclusion : malgré son apparence laborieuse, cette approche de la conjecture de Goldbach est bonne et juste.**

**Toutefois, elle présuppose que deux conditions sont remplies, deux conditions de taille :**

**1<sup>ère</sup> condition : il faudrait que la conjecture des nombres premiers jumeaux soit vérifiée, à savoir que l'on puisse avoir des nombres premiers jumeaux en quantité infinie.**

**2<sup>ème</sup> condition : il faudrait aussi que les couples de nombres premiers à même écart soient eux aussi en quantité infinie.**

**Ceci est en quelque sorte une généralisation de la conjecture des jumeaux.**

Nous allons nous atteler maintenant à explorer ces liens...

### III - Deux propriétés principales

#### 1 - Première propriété:

Soit un entier pair  $n$ , et soient les nombres premiers :  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ , tels que :

$$n = p_1 + p_2 ; \text{ avec : } p_1 < p_2$$

$$n = p_3 + p_4 ; \text{ avec : } p_3 < p_4$$

Ce qui nous donne :  $n \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$

Il en découle plusieurs propriétés. En premier celle-ci :

$$p_3 - p_1 = p_2 - p_4$$

C'est ce que nous appellerons dans cet article : ***écart des matrices***, ou simplement ***écart***.

Donc :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} a + p_3 & a + p_1 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$$

#### 2 - propriétés consécutives

On en déduit alors trivialement les propriétés suivantes :

Si l'on a :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix},$$

alors on aura :

$$(p_1 + p_3) < (p_1 + p_2) < (p_2 + p_4)$$

et :

$$(p_2 + p_3) < (p_1 + p_2) < (p_1 + p_4)$$

mais aussi :

$$(p_1 + p_3) + (p_2 + p_4) = 2 \cdot (p_1 + p_2)$$

et :

$$(p_1 + p_4) + (p_2 + p_3) = 2 \cdot (p_1 + p_2)$$

Hâtons-nous d'illustrer ces observations par un exemple concret :

Soit l'entier pair 36, tel que :

$$36 = (13 + 23)$$

et :

$$36 = (17 + 19)$$

Alors, on écrira :  $36 \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$

Ainsi, on peut écrire :

$$(17 + 13) < (17 + 19) < (19 + 23)$$

et :

$$(19 + 13) < (17 + 19) < (17 + 23)$$

De même :

$$(17 + 13) + (19 + 23) = 2*(17+19)$$

et :

$$(19 + 13) + (17 + 23) = 2*(17+19)$$

**Constat : la somme 36 est « associée » à 4 autres sommes :**

$$36 \rightarrow \{30 ; 32 ; 40 ; 42\}$$

Plus généralement : si l'entier pair  $n$  est associé à la matrice :  $\begin{pmatrix} p2 & p4 \\ p1 & p3 \end{pmatrix}$ , de telle sorte que:

$$p1 < p2$$

et :

$$p3 < p4$$

et de telle sorte que :

$$n = p1 + p2$$

et :

$$n = p3 + p4$$

Alors il est aussi associé à l'ensemble des entiers pairs suivants:

$$\{(p1+p3) ; (p2+p3) ; (p1+p4) ; (p2+p4)\}$$

### **3 - Application de ces propriétés :**

Comme les sommes de nombres premiers sont ainsi liées intimement entre elles, on pourra s'y appuyer dans la suite de notre recherche.

De ce fait, on n'aura pas besoin de faire – à l'aveugle - l'itération laborieuse que nous avons proposée précédemment.

L'explication formelle de cette affirmation est aisée en soi, mais elle n'éclaire malheureusement pas le lecteur.

Aussi, nous nous bornerons à l'illustrer par un exemple édifiant :

Comment trouver la matrice de 32 à partir de l'entier 30, sachant que 30 peut se présenter sous forme de trois matrices distinctes :

$$30 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}; 30 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}; 30 \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déjà, pour trouver une colonne de la matrice de 32, il suffit de s'appuyer sur l'unique jumeau "ouvert", à savoir : 11.

(11, 19), devient ainsi : (13, 19) :

$$32 \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & * \\ 13 & * \end{pmatrix};$$

Comme tous les autres éléments des 3 matrices sont saturés, alors, pour trouver le couple suivant, nous avons vu plus haut qu'il nous faudrait, dans ces cas, remonter plus loin que 30.

Toutefois, pour éviter notre laborieuse itération de 2 en 2, nous allons nous appuyer sur les « sommes associées » telles qu'on vient de le définir.

Supposons que l'on veuille s'appuyer sur le couple (7, 23) pour construire la matrice de 32 :

$$32 \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 7 & 23 \end{pmatrix},$$

Comme 7 et 23 sont des nombres premiers "saturés", nous aurions:

$$32 \rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 7 & 23 \end{pmatrix}; \text{ ça ne marche pas.}$$

Mais qu'à cela ne tienne. Utilisons la diagonale :  $\begin{pmatrix} * & 9 \\ 7 & * \end{pmatrix}$

$$7 + 9 = 16.$$

Or :

$$16 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 5 & 3 \end{pmatrix};$$

Ce qui nous donne, en remplaçant (9 + 7), soit par : (13 + 3), soit par : (5 + 11).

$$32 \rightarrow \begin{pmatrix} * & 13 \\ 3 & * \end{pmatrix} \implies 32 \rightarrow \begin{pmatrix} 29 & 13 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}; \text{ ça marche.}$$

Par contre, ça ne marche pas avec le second couple (5, 11), car alors on aurait :

$$32 \rightarrow \begin{pmatrix} 27 & 11 \\ 5 & 21 \end{pmatrix};$$

En fait, nous l'avons déjà signalé, les couples peuvent être liés à des « ensembles » différents. Ainsi, le couple (5, 11) doit servir à une autre somme, comme 34, par exemple :  $34 \rightarrow \begin{pmatrix} 29 & 11 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}$ .

Quoi qu'il en soit, si la somme (7 + 9 = 16) ne nous donnait pas satisfaction, on aurait choisi une somme plus petite dans la matrice de 16, et recommencer la même opération.

En conséquence, cela nous évite une itération par raison de 2.

Si l'on poursuit le raisonnement avec 16, alors on aura :

$$16 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ nous donne deux sommes : } \begin{pmatrix} 11 & * \\ * & 3 \end{pmatrix}; \text{ et : } \begin{pmatrix} * & * \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 14 nous donnerait le nombre 13 par : (1, 13) et 8 nous donnerait le nombre 3 par : (3, 5).  
Etc.

#### **4 – Autre propriété:**

Soient :

p1, p2, p3 et p4, des nombres premiers, tels que:

$$p1 < p2 \text{ et } p3 < p4$$

et

$$n = p1 + p2$$

$$n = p3 + p4$$

et tels que :

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} p2 & p4 \\ p1 & p3 \end{pmatrix}; \text{ ou encore : } n \rightarrow \begin{pmatrix} a + p3 & a + p1 \\ p1 & p3 \end{pmatrix}$$

Alors, on en déduit les 2 propriétés suivantes :

$$(p3 - p1) + (p4 - p3) = p4 - p1$$

et :

$$(p4 - p1) + (p2 - p4) = p2 - p1$$

**NB : Ces propriétés sont de haute importance : elles nous serviront plus tard en vue d'une autre démonstration.**

## **IV - Matrices de jumeaux**

### **1 - Constat**

Nous allons maintenant établir l'ensemble des entiers pairs dont les matrices sont composées exclusivement de nombres premiers jumeaux deux à deux :

$$(1, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 31 & 29 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

$$(3, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 31 & 29 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

$$(5, 7) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 31 & 29 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

$$(11, 13) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

Etc.

### **2 – propriétés**

Si l'on considère l'ensemble des sommes en lignes, en colonnes et en diagonales, on obtient ceci :

**Pour le couple (1, 3) :**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{2; 4; 6\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 6; 8\}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 6; 8; 10; 12\}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 12; 14; 16; 24\}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 18; 20; 22; 36\}$$

Etc.

**Pour le couple (3, 5):**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 6; 8\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \{6; 8; 10\}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \{8; 10; 12\}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \{8; 14; 16; 18; 24\}$$

Etc.

**Pour le couple (5, 7):**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \{4; 6; 8; 10; 12\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \{8; 10; 12\}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \{10; 12; 14\}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \{12; 16; 18; 20; 24\}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \{12; 22; 24; 26; 36\}$$

Etc.

Remarque : on aura beau multiplier les exemples, aussi loin que l'on voudra, **on notera que tous les entiers pairs sont associés en tant que somme, d'une manière ou d'une autre (ligne, colonne ou diagonale), à une matrice composée exclusivement de nombres jumeaux deux à deux.**

### 3 – Démonstration

**a – illustration par un exemple :**

Soit l'entier 28. Pour savoir de quelle façon il est « associé » à une matrice de jumeaux deux à deux, nous allons forcer la construction d'une matrice, avec ou sans nombres premiers, mais utilisant le couple des jumeaux (1, 3) :

$$28 \rightarrow \begin{pmatrix} 27 & 25 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Grâce à la méthode des sommes diagonales, que l'on vient d'explicitier, on peut écrire :

$$28 \rightarrow \begin{pmatrix} 27 & 25 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} * & 25 \\ 1 & * \end{pmatrix} \rightarrow 26.$$

$$\text{Et : } 26 \rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} * & 23 \\ 1 & * \end{pmatrix} \rightarrow 24.$$

A ce stade, le couple (1, 23) est valable. Il deviendra pour 26  $\rightarrow$  (3, 23), et enfin : 28  $\rightarrow$  (5, 23).

Notons que l'entier 5 est un élément jumeau (3, 5), et (5, 7)

Mais poursuivons :

$$\begin{aligned} 24 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \implies \begin{pmatrix} * & 21 \\ 1 & * \end{pmatrix} \dashrightarrow 22 \\ 22 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$20 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ça marche.}$$

On en déduit aisément :

$$28 \dashrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 19 \end{pmatrix} \implies 30 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 27 & 9 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi que : } 28 \dashrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 3 & 17 \end{pmatrix} \implies 30 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$$

Soit finalement :

$$28 \dashrightarrow \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Relevons que 3 des ses éléments sont des éléments jumeaux : {5, 11, 17}

$$5 \dashrightarrow (3, 5)$$

$$11 \dashrightarrow (11, 13)$$

$$17 \dashrightarrow (17, 19)$$

### **b – généralisation :**

Soit un entier pair : m.

Traduisons-le en matrice – avec ou sans nombres premiers – mais avec le couple de jumeaux (1, 3) :

$$m \rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & m-3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On aura : } \begin{pmatrix} * & m-3 \\ 1 & * \end{pmatrix} \dashrightarrow m-2$$

$$\text{Puis : } (m-2) \dashrightarrow \begin{pmatrix} m-3 & m-5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et : } \begin{pmatrix} * & m-5 \\ 1 & * \end{pmatrix} \dashrightarrow m-4$$

Etc.

Comme cette itération se fait de 2 en 2, inévitablement on rencontrera des nombres premiers qui nous permettront de reconstruire une « vraie » matrice, composée exclusivement de nombres premiers.

Et parmi ceux-ci, on rencontrera inévitablement des nombres premiers jumeaux.

Ce qui nous donnera :

$$(m-r) \dashrightarrow \begin{pmatrix} m-(r+1) & m-(r+3) \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ tel que :}$$

r, étant un entier naturel < m ;

m - (r + 1), et m - (r + 2), étant des nombres premiers jumeaux.

Ainsi, on pourra rechercher la (ou les) colonne(s) manquante(s) de la matrice de m :

$$m \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & m - (r + 1) \end{pmatrix}, \text{ ou bien : } m \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 3 & m - (r + 3) \end{pmatrix}$$

Soient donc :

$$m \rightarrow \begin{pmatrix} m - 1 & r + 1 \\ 1 & m - (r + 1) \end{pmatrix}$$

et :

$$m \rightarrow \begin{pmatrix} m - 3 & r + 3 \\ 3 & m - (r + 3) \end{pmatrix}$$

Remarque importante : les colonnes de la matrice de (m - r) ne seront pas toutes toujours valables pour m, car comme on l'a vu justement plus haut, les colonnes non-valables pour m le seront pour un autre entier pair de son voisinage.

Dans ces conditions, on pourra alors reprendre l'itération à partir de ce nombre « voisin ».

## **V – Généralisation de la conjecture des jumeaux :**

### **1 - Constat :**

Comme on l'a vu, toutes les matrices sont associées à des matrices à jumeaux deux à deux.

Mieux : toutes les familles de matrices « naissent » de celles-ci.

Ainsi par exemple, de la matrice :  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

On a non seulement les couples jumeaux (1, 3) et (3, 5), dont l'écart est de 2, mais on a aussi le couple (1, 5) dont l'écart est de 4.

On pourra donc construire la famille de couples à écart 4 :

$$(1, 5) \rightarrow \{(3, 7); (7, 11); (13, 17), \dots\}$$

$$\text{De même pour le couple (1, 7) de la matrice : } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(1, 7) \rightarrow \{(5, 11); (7, 13); (13, 19); \dots\}$$

*NB : On remarquera qu'on ne peut pas avoir tous les écarts à partir de l'entier 1, comme par exemple l'écart 8 : (1, 9); ou l'écart 14 : (1, ~~15~~), ou encore l'écart 20 : (1, ~~21~~).*

*Toutefois, on les retrouvera TOUS avec les autres nombres premiers jumeaux à même écart.*

*Ainsi :*

*Pour 8, et pour 14, au lieu de 1 de : (1, 9), on aura 5, soit :*

$$5 + 8 = 13 \rightarrow (5, 13),$$

$$5 + 14 = 19 \rightarrow (5, 19).$$

*Pour 20, on aura 11, soit :*

$$11 + 20 = 31 \rightarrow (11, 31)$$

*Etc.*

**Si l'on compose toutes les matrices pour tous les « écarts », y compris l'écart 2, on aura ainsi tissé toute une toile de matrices dont les sommes de leurs éléments (deux à deux : en lignes, colonnes, et en diagonales), couvrent l'ensemble des entiers naturels pairs...**

Exemple de l'écart 4 :

D'abord avec le couple (1, 5) :

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \{4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \{6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 18\}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 13 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \{6 ; 14 ; 18 ; 22 ; 30\}$$

$$\begin{pmatrix} 23 & 19 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \{6 ; 20 ; 24 ; 28 ; 42\}$$

Etc.

Ensuite avec le couple (3, 7) :

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \{10 ; 14 ; 18\}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 13 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \{10 ; 16 ; 20 ; 24 ; 30\}$$

$$\begin{pmatrix} 23 & 19 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \{10 ; 22 ; 26 ; 30 ; 42\}$$

Etc.

## **2 – Première conséquence :**

Plus haut, nous avons choisi de construire une matrice avec un couple à écart 2. Mais rien ne nous y oblige : on peut tout aussi bien choisir un autre écart (inférieur à l'entier concerné, voire inférieur à sa moitié)

On aurait eu, par exemple, comme matrice de départ :

$$\text{Ecart : } 4 \implies 38 \longrightarrow \begin{pmatrix} 37 & 33 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} ; \text{ ou encore : } 38 \longrightarrow \begin{pmatrix} 35 & 31 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} ;$$

Ou encore :

$$\text{Ecart : } 6 \implies 38 \longrightarrow \begin{pmatrix} 35 & 31 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} ; 38 \longrightarrow \begin{pmatrix} 31 & 25 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} ;$$

Etc.

Ce qui nous permet d'affirmer ceci :

**Toutes les matrices de nombres premiers associées à des entiers pairs contiennent au moins un élément appartenant à un couple jumeau. Et de ce fait, elles sont associées in fine à – au moins – une matrice de jumeaux deux à deux.**

## **VI – En guise de conclusion :**

### **1 – une « toile » complète et infinie :**

*Au-delà de ce que nous avons essayé de montrer plus haut, il faut noter toutefois que les nombres premiers appartiennent chacun à plusieurs familles à la fois : un jumeau, par exemple, fait aussi partie d'autres familles à autres écarts.*

Illustrons nos propos par les éléments de la matrice associée à l'entier : 38  $\rightarrow \begin{pmatrix} 37 & 31 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

- 1 appartient aux familles à écarts suivants : {2 ; 4 ; 6 ; 10 ; 12 ; ...}.
- 7 : {2 ; 4 ; 6 ; 10 ; ...}
- 31 : {2 ; 8 ; 14 ; ...}
- 37 : {6 ; 8 ; 14 ; 18 ; ...}

## **2 – une nouvelle conjecture ?**

**Ainsi, l'infinité des jumeaux implique nécessairement l'infinité des autres familles à autres écarts. Si cette affirmation se vérifie, alors elle constituerait une généralisation de la conjecture des jumeaux.**

En conséquence de la conjecture de Goldbach, on peut affirmer ceci : **tout nombre premier est à égale distance de deux autres nombres premiers.**

Enfin, si ces explications s'avèrent justes et suffisantes, il y aura de nombreuses autres déductions pour la théorie des nombres.

Ainsi, en tout cas, à l'échelle des nombres premiers, se dessinent de nombreux ordres, ou du moins de nombreux sous-ordres, susceptibles de rendre compte de ce qui nous apparaît comme un désordre global et insondable...

Mkmir  
Juillet 2013