

Considérations sur deux conjectures : la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Dans un premier temps, nous allons tenter une approche originale de la conjecture de Goldbach. Puis, dans un second temps, nous verrons qu'elle ne pourrait être vraie que si la conjecture des nombres premiers jumeaux l'est aussi.

Avertissement : pour ce faire, il nous est indispensable d'inclure (exceptionnellement) l'entier 1 à l'ensemble des nombres premiers.

Voici donc l'affirmation que nous allons expliciter :

Tout entier pair $2n$ est la somme des éléments de DEUX COUPLES de nombres premiers pris deux à deux :

$$2n = p1 + p2$$

$$2n = p3 + p4$$

$p1, p2, p3$ et $p4$ étant des nombres premiers.

I - Première approche : construction de l'objet d'étude :

1 – Constat :

Remarquons que les premiers entiers pairs, (≥ 6), s'écrivent tous sous forme de deux sommes :

- Le nombre 6:

$$6 = 1 + 5$$

$$6 = 3 + 3$$

- Ainsi que 8:

$$8 = 7 + 1$$

$$8 = 3 + 5$$

- Et 10:

$$10 = 3 + 7$$

$$10 = 5 + 5$$

- Et ainsi de suite...

3 – Notations :

a – matrices : on notera $M[2n]$, la matrice composée des 4 éléments des couples dont $2n$ est la somme (deux à deux). Ainsi :

Si $p1, p2, p3$ et $p4$ sont des nombres premiers, tels que :

$$2n = p_1 + p_2$$

$$2n = p_3 + p_4,$$

On écrira la matrice de $2n$: $M[2n] = \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Exemples : } M[6] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; M[8] = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; M[10] = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; \text{etc.}$$

b – Couples : on notera $C_{i[2n]}$, les couples composant chaque somme. Ainsi :

$$C_{1[2n]} = (p_1, p_2)$$

$$C_{2[2n]} = (p_3, p_4)$$

c - convention : comme on sera souvent amené à parler de deux sortes de nombres premiers, autant les différencier d'emblée :

- On nommera « ouvert », tout nombre premier qui est **immédiatement** suivi d'un nombre premier (exemple : 5 car suivi de 7 ; 11 car suivi de 13, etc.). Les « ouverts » sont en quelque sorte les « têtes de liste » des couples jumeaux.

- On nommera « saturés » les nombres premiers qui sont immédiatement suivis d'un entier impair non-premier (exemple : 7, car suivi de 9, mais aussi 23 car suivi de 25, etc.)

Remarque : un entier pair peut être parfois la somme de 3 couples (deux à deux). Et dans ce cas, les 3 couples généreront 3 matrices. Cela nous sera utile dans certaines circonstances.

II – Etude des matrices :

1 – Matrices à nombres premiers « ouverts » :

Dans les cas où une matrice contient au moins deux nombres premiers « ouverts », on pourra aisément passer de la matrice d'un entier pair à son suivant, en utilisant les couples des matrices.

Soient p_1 et p_2 deux premiers « ouverts », tels que : $2n = p_1 + p_2$.

Alors on pourra écrire :

$$M[2n] = \begin{pmatrix} p_2 & * \\ p_1 & * \end{pmatrix} \implies M[2n+2] = \begin{pmatrix} 2 + p_2 & * \\ p_1 & * \end{pmatrix} ;$$

Ou encore :

$$M[2n] = \begin{pmatrix} p_2 & * \\ p_1 & * \end{pmatrix} \implies M[2n+2] = \begin{pmatrix} p_2 & * \\ 2 + p_1 & * \end{pmatrix} ;$$

Soit donc :

$$M[2n+2] = \begin{pmatrix} 2 + p_2 & p_2 \\ p_1 & 2 + p_1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$M[6] = \begin{pmatrix} * & 5 \\ * & 1 \end{pmatrix} \implies M[8] = \begin{pmatrix} * & 3 + 5 \\ * & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{Mais aussi : } M[6] = \begin{pmatrix} * & 5 \\ * & 1 \end{pmatrix} \implies M[8] = \begin{pmatrix} * & 5 \\ * & 1 + 2 \end{pmatrix} ;$$

Soit donc :

$$M[8] = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Conséquence importante : dans les situations de matrices à nombres premiers « ouverts », le (ou) le(s) couple(s) de l'entier pair $(2n + 2)$ dépendent de ceux de l'entier pair $2n$:

Ainsi : $p1 \rightarrow 2 + p1$

Et : $p2 \rightarrow 2 + p2$.

Autrement dit, nous tenons là un premier lien entre la conjecture de Goldbach et celle des nombres premiers jumeaux.

2 – Matrices à nombres premiers « saturés » :

Remarque préliminaire : nous avons étudié un nombre conséquent d'exemples, mais nous n'avons jamais rencontré une matrice dont TOUS les éléments sont « saturés ». En effet, il y a bien des matrices à 4 éléments « saturés », mais dans tous les cas rencontrés, ces matrices présentent aussi un troisième couple avec au moins un élément « ouvert ».

Malgré tout, supposons qu'il en existe, et voyons ce qu'il convient d'en faire.

a – Propriété :

Nous avons vu plus haut qu'un couple de la matrice de $2n$ sert à trouver un ou deux couples de $(2n+2)$.

En fait, il sert aussi à de nombreux entiers pairs supérieurs à $(2n+2)$.

$M[2n] = \begin{pmatrix} p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}$ nous donne :

$$M[2n + 2] = \begin{pmatrix} 2 + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}; M[2n + 4] = \begin{pmatrix} 4 + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}; M[2n + 6] = \begin{pmatrix} 6 + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}; \dots;$$

$$\text{Et plus généralement: } M[2n + 2k] = \begin{pmatrix} 2k + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix};$$

Note : les éléments ainsi obtenus ne sont pas TOUS premiers. Mais, comme nous progressons par raison de 2, nous rencontrerons sûrement des nombres premiers.

Illustrons cette affirmation par un exemple:

$$4 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$$

Le couple $(1, 3)$ ne sert pas seulement à 6, mais aussi à une infinité d'autres entiers pairs :

$$6 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 14 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; 20 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

Et même d'autres entiers pairs le reprennent en partie:

$$10 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 12 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & \square \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 16 \rightarrow \begin{pmatrix} \square & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 18 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & \square \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$

b – Conséquence de cette propriété :

Soit $M[2n] = \begin{pmatrix} p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}$; avec $p1$ et $p2$ des éléments saturés.

On sait donc que : $(2 + p1)$ et $(2 + p2)$ ne sont pas premiers.

Alors on reconstruit une matrice de $(2n - 2)$, puis en cas d'échec de $(2n - 4)$, et ainsi de suite. On aura :

$$M[2n - 2k] = \begin{pmatrix} -2k + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix} ; \text{ ou encore : } M[2n - 2k] = \begin{pmatrix} p2 & * \\ -2k + p1 & * \end{pmatrix}$$

Comme nous décroissons par raison de 2, on finira inévitablement par tomber sur un nombre premier, soit inférieur à $p1$ soit inférieur à $p2$.

$$\text{Prenons : } M[2n - 2k] = \begin{pmatrix} -2k + p2 & * \\ p1 & * \end{pmatrix}$$

On remarquera qu'on a fait décroître le nombre premier $p2$, et on a gardé intact le nombre premier $p1$.

Pour retrouver maintenant $M[2n+2]$, on inversera la progression en faisant croître cette fois-ci : $p1$.

Ainsi, on aura successivement :

$$M[2n-2k+2] = \begin{pmatrix} -2k + p2 & * \\ 2 + p1 & * \end{pmatrix} ; M[n - 2k + 4] = \begin{pmatrix} -2k + p2 & * \\ 4 + p1 & * \end{pmatrix} ; \dots$$

Et, in fine :

$$M[2n+2] = \begin{pmatrix} -2k + 2 + p2 & * \\ 2k + p1 & * \end{pmatrix}$$

Ou bien :

$$M[2n+2] = \begin{pmatrix} -2k + p2 & * \\ 2k + 2 + p1 & * \end{pmatrix}$$

Exemple concret :

Sachant que : $M[20] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 7 & * \end{pmatrix}$, essayons de trouver $M[22] = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

On le voit dans cet exemple, les deux éléments de la matrice de 20 ici retenus sont « saturés ». Si l'on devait appliquer la méthode simple, on écrirait :

$$M[20] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 7 & * \end{pmatrix} \implies M[22] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 9 & * \end{pmatrix} ; \text{ ou bien } M[22] = \begin{pmatrix} 15 & * \\ 7 & * \end{pmatrix}.$$

Aucun de ces deux couples ne peut être retenu.

Pour trouver des couples valables, il faudra « remonter » à 18 en diminuant soit 7, soit 13.

- Si on diminue 7, on aura : $M[20] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 7 & * \end{pmatrix} \implies M[18] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 5 & * \end{pmatrix}$
- Si on diminue 13, on aura $M[20] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 7 & * \end{pmatrix} \implies M[18] = \begin{pmatrix} 11 & * \\ 7 & * \end{pmatrix}.$

Ce qui donne les progressions inverses suivantes :

$$M[18] = \begin{pmatrix} 13 & * \\ 5 & * \end{pmatrix} \implies M[20] = \begin{pmatrix} 15 & * \\ 5 & * \end{pmatrix} \implies M[22] = \begin{pmatrix} 17 & * \\ 5 & * \end{pmatrix}$$

De même :

$$M[18] = \begin{pmatrix} 11 & * \\ 7 & * \end{pmatrix} \implies M[20] = \begin{pmatrix} 11 & * \\ 9 & * \end{pmatrix} \implies M[22] = \begin{pmatrix} 11 & * \\ 11 & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui fait : } M[22] = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a donc fait : $(7 - 2)$ et $(13+2+2)$ pour le premier cas
Et $(7+4)$ et $(13-2)$ pour le second cas.

c – Conclusions importantes :

Comme on vient de le voir, pour construire les matrices associées aux entiers pairs, de telle sorte que ces entiers soient la somme de deux nombres premiers, il faudrait que l'on puisse affirmer ceci :

Quels que soient p_1 et p_2 , deux nombres premiers, tels que :

$$2n = p_1 + p_2,$$

alors il existe toujours un entier $k \leq p_2$, tel que :

$(p_2 - 2k)$ et $(2 + p_1 + 2k)$ soient eux aussi des nombres premiers.

(On notera que si $k = 0$, on retrouve les nombres premiers jumeaux).

Dire que k existe toujours, cela signifie ceci : un écart entre deux premiers implique automatiquement le même écart augmenté de 2 entre deux autres premiers qui leurs sont liées par la formule indiquée plus haut.

Cela veut dire en particulier que l'écart de raison 2 (celui des jumeaux) implique l'écart de raison 4, lequel implique à son tour l'écart de raison 6, etc.

En conséquence, si les nombres premiers jumeaux sont en quantité infinie, alors les nombres premiers à « égal écart » le sont tout autant. Ce qui représenterait une sorte de généralisation de la conjecture des jumeaux.

Mais cela veut dire aussi que la conjecture de Goldbach est ainsi intimement liée à la conjecture des jumeaux dont elle dépend totalement.

On voit aussi que l'ensemble des couples jumeaux est cas particulier de l'ensemble des couples de nombres premiers que je nomme ici par convention « couples égal écart ».

[Nous nous attèlerons à explorer ces liens dans la seconde partie qui suivra...]

Mkmir

Besançon août 2013