Table des matières

0.1 Complexes fendus $\mathbb{C}\!\!\!\!\diagup$

0.1.1 Introduction

Les complexes fendus, notés $\mathbb{C}\!\!\!\!\diagup$, ont été introduits par William Kingdon Clifford (1845 - 1879) en 1873, ils sont construits, comme les nombres complexes *standard*, en ajoutant à $\mathbb{R}$ un nouvel élément, mais dans ce cas, le carré de ce nouvel élément est 1 (et non -1).

L'aspect le plus utile des complexes fendus est leur usage en relativité générale (ce qui explique qu'ils soient parfois appelés *nombres Espaces-Temps*).

0.1.2 Définition

Les complexes fendus sont des hypercomplexes de dimension 2, c'est à dire qu'ils sont isomorphes à $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, en tant qu'espace vectoriel, de plus une multiplication distributive sur l'addition est définie entre complexes fendus : $(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 + a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0)$, les opérations sur chaque coordonnées sont les opérations habituelles sur $\mathbb{R}$.

0.1.3 Mode de construction

Les nombres complexes fendus sont des nombres de la forme $z = a_0 + a_1 \cdot e_1$, où $a_i \in \mathbb{R}$ et $e_1^2 = 1$, a_0 est appelé la partie réelle, et a_1 la partie hyperbolique (ou encore partie unipotente, voire, partie hallucinatoire).

Dans le cas des nombres complexes fendus, l'élément de base e_1 est généralement noté j [1].

0.1.4 Table de multiplication

Dans une telle algèbre, la multiplication est entièrement définie par la table de multiplication des éléments d'une base, ici, la base naturelle est $(1, j)$, et comme 1 est l'élément neutre de la multiplication $(1 \cdot j = j \cdot 1 = j)$, et comme j^2 est déterminé par la définition, la table de multiplication est facile à écrire :

$\cdot$	1	j
1	1	j
j	j	1

Cette multiplication est associative, elle permet donc de définir la notion de série entière, en particulier la fonction exponentielle.

L'exponentielle est définie comme la série entière (pour une variable appartenant à un ensembles de « nombres » $E : \forall x \in E, \left(e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$

Dans le cas des complexes fendus on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}\, e^{x \cdot j} = 1 + \frac{x \cdot j}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot j}{3!} + \cdots$

En regroupant les termes, on obtient : $e^{x \cdot j} = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) + (\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + + \frac{x^5}{5!} + \cdots) \cdot j$

Relation que nous pouvons écrire sous la forme d'une relation d'Euler : $e^{x \cdot j} = \mathrm{ch}(x) + j \cdot \mathrm{sh}(x)$.

En multiplant les deux séries on obtient très facilement $e^{x \cdot j} \cdot e^{y \cdot j} = e^{(x+y) \cdot j}$, et en itérant, $(e^{x \cdot j})^n = e^{n x \cdot j}$. Ce résultat permet de démontrer une formule de « De Moivre » : $(\mathrm{ch}(x) + j \cdot \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + j \cdot \mathrm{sh}(nx)$.

1. A ne pas confondre avec une racine troisième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

0.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Pour $z = a_0 + a_1 \cdot j$ alors $\overline{z} = a_0 - a_1 \cdot j$. La conjugaison est un automorphisme d'ordre 2 ($\overline{\overline{z}} = z$).

Le module[2] de z, $|z|^2 = |z \cdot \overline{z}| = |a_0^2 - a_1^2|$ ($|z| = \sqrt{|z \cdot \overline{z}|}$) est multiplicatif, mais ce n'est pas une norme.

On peut noter que la multiplication de z par un complexe fendu de module 1, conserve le module de z : $|z \cdot e^{x \cdot j}| = |z|$, autrement dit cette multiplication conserve $z \cdot \overline{z} = a_0^2 - a_1^2$, c'est à dire que toute hyperbole d'équation $a_0^2 - a_1^2 = k$ est globalement invariante par une multiplication par un complexe fendu de module 1, d'où le nom de complexes hyperboliques que l'on utilise parfois à la place de complexes fendus.

Tous les nombres complexes fendus n'ont pas d'inverse, un nombre complexe fendu est inversible si et seulement si son module est différent de 0, et dans ce cas :
$z^{-1} = \dfrac{\pm\overline{z}}{|z|^2}$ (signe + pour les complexes fendus tels que $a_0^2 > a_1^2$, et signe $-$ pour les complexes fendus tels que $a_0^2 < a_1^2$)

Lorsque les nombres complexes fendus sont utilisés dans le cadre « Espace-Temps » , le vocabulaire suivant est utilisé :

$$\text{Soit } z = a_0 + a_1 \cdot j \begin{cases} a_0^2 < a_1^2 & \text{Nombre de type Temps} \\ a_0^2 = a_1^2 & \text{Nombre de type Lumière} \\ a_0^2 > a_1^2 & \text{Nombre de type Espace} \end{cases}$$

On peut donner une forme polaire aux complexes fendus :

$$\text{Soit } z = a_0 + a_1 \cdot j \begin{cases} a_0^2 < a_1^2 & a_0 + a_1 \cdot j = j \cdot \rho e^{j\theta} \\ a_0^2 = a_1^2 & \text{Pas de forme polaire} \\ a_0^2 > a_1^2 & a_0 + a_1 \cdot j = \rho e^{j\theta} \end{cases}$$

Plus précisément, dans le cas des nombres de type Espace ($a_0^2 - a_1^2 > 0$, donc $a_0 \neq 0$), on pose
$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot j & = & \rho e^{j\theta} & = & \rho(\mathrm{ch}(\theta) + j \cdot \mathrm{sh}(\theta)) \\ a_0 - a_1 \cdot j & = & \rho e^{-j\theta} \end{cases}$$

En multiplant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $a_0^2 - a_1^2 = \rho^2$, d'où $\rho = \pm\sqrt{a_0^2 - a_1^2}$, $a_0 = \rho\,\mathrm{ch}(\theta)$, $a_1 = \rho\,\mathrm{sh}(\theta)$ (où $a_0 > 0 \Leftrightarrow \rho > 0$ et $a_0 < 0 \Leftrightarrow \rho < 0$) et $\theta = \mathrm{arcth}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)$.

Dans le cas des nombres de type Temps ($a_1^2 - a_0^2 > 0$, donc $a_1 \neq 0$), on pose
$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot j & = & j \cdot \rho e^{j\theta} & = & \rho(\mathrm{sh}(\theta) + j \cdot \mathrm{ch}(\theta)) \\ a_0 - a_1 \cdot j & = & j \cdot \rho e^{-j\theta} \end{cases}$$

Et finalement : $a_1^2 - a_0^2 = \rho^2$, d'où $\rho = \pm\sqrt{a_1^2 - a_0^2}$, $a_0 = \rho\,\mathrm{sh}(\theta)$, $a_1 = \rho\,\mathrm{ch}(\theta)$ (où $a_1 > 0 \Leftrightarrow \rho > 0$ et $a_1 < 0 \Leftrightarrow \rho < 0$) et $\theta = \mathrm{arcth}\left(\dfrac{a_0}{a_1}\right)$.

0.1.6 Propriétés algébriques

L'ensemble des complexes fendus est une algèbre unitaire, associative et commutative de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ contient des éléments idempotent (autre que 0 et 1), des diviseurs de 0 (ce n'est donc pas un corps) mais pas d'élément nilpotent.

$$\text{Par exemple : } \begin{cases} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot j)^2 & = & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot j) \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot j)^2 & = & (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot j) \\ (1 - j)(1 + j) & = & 0 \end{cases}$$

2. Plusieurs définitions du module, avec ou sans les valeurs absolues, apparaissent dans la littérature, en fonction des auteurs, nous avons fait le choix qui ne laisse aucune ambiguité sur la notation $|z|$.

Les résultats précédents permettent de définir une autre base pour $\mathbb{C}$: $\begin{cases} e_0 & = & \dfrac{1+j}{2} \\ e_1 & = & \dfrac{1-j}{2} \end{cases}$

Or pour cette nouvelle base, la table de multiplication devient :

$\cdot$	e_0	e_1
e_0	e_0	0
e_1	0	e_1

Dans cette base, la multiplication de deux éléments se fait coordonnée par coordonnée, c'est à dire que $\mathbb{C}$ est en fait isomorphe à $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ **en tant qu'algèbre** et non seulement en tant qu'espace vectoriel.

On peut montrer, avec un tout petit peu de calcul, que $(a_0 + a_1 \cdot j)(b_0 + b_1 \cdot j) = 0$ si et seulement si $a_1 = \pm a_0$ et $b_1 = \mp b_0$, autrement dit, si le produit précédent est de la forme $a(1+j)b(1-j)$ (à l'ordre des termes près).

Les diviseurs de 0 sont donc les nombres de la forme $a_0 + a_1 \cdot j$, ou $a_0^2 = a_1^2$.

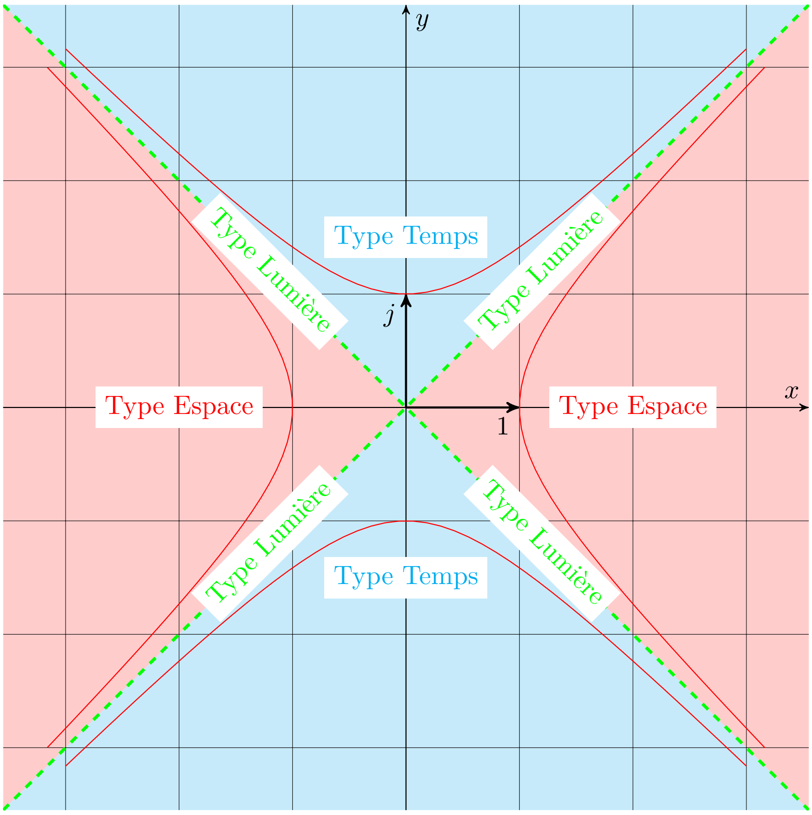

Figure 1 – Cercle unité

Les diviseurs de 0 sont les nombres qui correspondent aux droites vertes en pointillés (moins le point (0, 0)), alors que les deux hyperboles en rouge représentent le « Cercle unité » $(z \cdot \overline{z} = 1)$. Voir aussi le Plan Perplexe Etendu.

La résolution des équations du 2^{nd} degré à coefficients réels est un peu différente dans $\not{\mathbb{C}}$ et dans $\mathbb{C}$:

Nombre de solutions

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\not{\mathbb{C}}$
0	2	0
1	1	1
2	2	4

Si on représente dans le plan les deux racines réelles (a et b ci-dessous) d'une équation à coefficients réels ainsi que les deux nouvelles racines appartenant à $\not{\mathbb{C}}$, on obtient ... un carré.

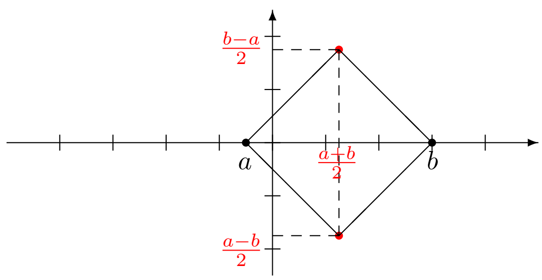

Figure 2 – Racines d'une équation du 2^{nd} degré.

Un même polynôme peut se factoriser de deux façons différentes, par exemple :

$$\begin{cases} x^2+2x-3 &= (x-1)(x+3) \\ x^2+2x-3 &= (x+1-2j)(x+1+2j) \end{cases}$$

La notion de multiplicité d'une racine d'une équation est un peu plus compliquée que dans $\mathbb{C}$, néanmoins cette notion permet de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre $\not{\mathbb{C}}$:

Soit α_μ et α_ν, deux nombres somplexes fendus, alors :

$$\left(x-\left(\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}+j\cdot\frac{\alpha_\mu-\alpha_\nu}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}+j\cdot\frac{\alpha_\nu-\alpha_\mu}{2}\right)\right)=x^2-x(\alpha_\mu+\alpha_\nu)+\alpha_\mu\cdot\alpha_\nu$$

Autrement dit, si α_μ et α_ν sont des racines d'un polynôme, alors $\left(\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}+j\cdot\frac{\alpha_\mu-\alpha_{i_2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}+j\cdot\frac{\alpha_\nu-\alpha_\mu}{2}\right)$ sont aussi racines de ce polynôme.

En généralisant le résultat précédent, si un polynôme à coefficient dans $\not{\mathbb{C}}$ peut se factoriser en n facteurs du premiers degré, mettant en évidence n racines $(\alpha_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, certaines pouvant être égales alors, pour chaque couple (μ,ν), $\left(\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}+j\cdot\frac{\alpha_\mu-\alpha_\nu}{2}\right)$ est aussi une racine (on peut trouver plusieurs fois le même résultat, le nombre de fois où l'on trouve une même valeur est la multiplicité de cette racine).

On peut donc calculer le nombre de racines, en tenant compte de la multiplicité, pour un polynôme se factorisant en n facteurs du premier degré : $n+\mathrm{A}_n^2=n+n(n-1)=n^2$.

D'où le théorème fondamental de l'algèbre $\not{\mathbb{C}}$: un polynôme à coefficients dans $\not{\mathbb{C}}$ et qui peut se factoriser en n facteurs du premier degré, possède n^2 racines dans $\not{\mathbb{C}}$, en tcomptant la multiplicité de chque racine.

0.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les complexes fendus sont une algèbre de Clifford, plus précisément : $\mathcal{C}\ell_{1,0}(\mathbb{R})$.

Ce sont aussi des Tessarines :

Les Tessarines forment un sous-ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{H})$, plus précisément c'est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} q & q' \\ q' & q \end{pmatrix}$ où q et q' sont des quaternions, pour obtenir les complexes fendus, il suffit d'imposer que q et q' soient en fait des réels (ce qui rend $\mathbb{C}$ isomorphe à un sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$, celui des matrices réelles $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$).

L'ensemble des nombres complexes fendus peux aussi être construit comme $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)$, c'est-à-dire le quotient de l'anneau des polynômes réels par l'idéal principal engendré par le polynôme (X^2-1).

Dans la littérature on trouve de nombreux synonymes pour $\mathbb{C}$:

- Nombres complexes hyperboliques.
- Nombres complexe déployés.
- Moteurs algébriques (Clifford).
- Nombres bi-réels.
- Contre-complexe.
- Nombres doubles.
- Nombres complexes anormaux.
- Nombres perplexes.
- Nombres de Lorentz.
- Nombres espace-temps.

On peut remarquer que la multiplication des Nombres Complexes Fendus vérifie quelques relations simples :

$\cdot$	**Type Temps**	**Type Lumière**	**Type Espace**
Type Temps	Type Espace	Type Lumière	Type Temps
Type Lumière	Type Lumière	Type Lumière	Type Lumière
Type Espace	Type Temps	Type Lumière	Type Espace

Tableau que l'on peut rapprocher du tableau suivant pour les nombres réels :

$\cdot$	**Négatif**	**0**	**Positif**
Négatif	Positif	0	Négatif
0	0	0	0
Positif	Négatif	0	Positif

0.1.8 Utilisation en physique

Les complexes fendus sont utilisés pour représenter les sommes de spins en 1882.

Ils sont devenus un moyen usuel pour décrire les transformations de Lorentz de la relativité.

L'espace de Minkowski de la relativité restreinte possède une géométrie hyperbolique.

0.1.9 Utilisation surprenante

Tout le monde connaît l'adage « Les amis de mes amis sont mes amis », adage que l'on peut prolonger sans hésiter à « Les amis de mes ennemis sont mes ennemis »et « Les ennemis de mes amis sont mes ennemis »et d'une façon plus discutable à « Les ennemis de mes ennemis sont mes ennemis », schémas isomorphe au schéma de la règle des signes dans la multiplication des Réels.

Dans un logiciel de rencontres on peut créer la relation « Est similaire à » entre les inscrits, cette relation vérifiant le schéma ci-dessus (avec la même restriction que ci-dessus), ce qui permet de générer des relations mêmes si elles n'ont pas été déclarées, mais on peut créer aussi la relation « Aime », qui ne vérifie pas le schéma ci-dessus, mais comment peut-on dériver une relation entre **A** et **C** lorsque l'on a les relations :

A « Est similaire à » **B** « Aime » **C**, ou **A** « Aime » **B** « Aime » **C**.

La réponse a été testé avec succès en utilisant des Nombres Complexes Fendus : dans un graphe orienté dont les arêtes sont pondérés par des Complexes Fendus !

$\cdot$	-j	-1	1	j
-j	1	j	-j	-1
-1	j	1	-1	-j
1	-j	-1	1	j
j	-1	-j	j	1

Tableau de multiplication qui est isomorphe au tableau de composition suivant :

$\circ$	N'aime pas	Non similaire à	Similaire à	Aime
N'aime pas	Similaire à	Aime	N'aime pas	Non similaire à
Non similaire à	Aime	Similaire à	Non similaire à	N'aime pas
Similaire à	N'aime pas	Non similaire à	Similaire à	Aime
Aime	Non Similaire à	N'aime pas	Aime	Similaire à

0.1.10 Références

1. N. Borota, E. Flores et T. Osler, *Spacetime Numbers The Easy Way*, Mathematics and Computer Education, Volume 34, N° 2, pages 159 - 168, 2000.
2. P. Fjelstad,*Extending relativity via the perplex numbers*, American Journal of Physics, Volume 54, N° 5, pages 416 - 422, 1986.
3. D. Hestenes, *Space Time Algebra*, Gordon and Breach, 1966.
4. D. Lambert, *Les nombres complexes hyperboliques : des complexes qui nous laissent perplexes*, Revue des Questions Scientifiques 166, N° 4, pages 383 - 400, 1996.
5. A. Ronveaux, *About perplex numbers*, American Journal of Physics, Volume 55, N° 5, 1987.
6. G. Sobczyk, *The hyperbolic number plane*, The College Mathematical Journal, Volume 26, N° 4, pages 268 - 280, 1995.
7. S. Olariu ,*Complex Numbers in n Dimensions*, Bentham, 2004.