Séminaire des Doctorants.
Quelques questions de géométrie differentielle.

10-28-13

1 Fibrations, Connexions, Courbures, avec des S.

1.1 Fibrations.

Le but de cette première partie est de rappeler des définitions et des generalités sur les connexions et notament de mettre en regard differentes notions de connexions que l'on voit présenter habituellement dans la litterature. Commencons par rappeler quelques definitions que vous connaitrez probablement.

Définition 1.1.1. *(Fibration)*
Soit X, F, E trois variété differentiables, et $p : E \to X$ une application lisse (i.e infiniement differentiable) entre elles. On dit que p est une fibration *de fibre F, s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de X et des isomorphismes h_i, appelés trivialisations, $p^{-1}(U_i) \xrightarrow{h_i} U_i \times F$, qui commutent à la projection sur U_i.*
Si $E \to X$ et $E' \to X$ sont deux fibrations de fibres F et F' respectivement, alors $f : E \to E'$ est un morphisme de fibration *ssi f commute aux projections de E et E'.*

On définit ainsi la catégorie des fibrations sur X.On appelera F la fibre de la fibration, et X la base, et parfois on appelera simplement E, la fibration $p : E \to X$ (sans reference explicite à p). Une fibration sera dite triviale si elle est isomorphes en tant que fibration à la fibration $X \times F$.

Il y a deux exemples de fibrations qui interviennent un peu partout, ce sont les notions de fibré vectoriel et de fibré principal.

Définition 1.1.2. *(Fibré vectoriel)*
On dit que $p : E \to X$ est un fibré vectoriel, si c'est une fibration telle que la fibre F soit un espace vectoriel, et que les applications de transitions *$h_i \circ h_j^{-1} : U_j \times F \to U_i \times F$ soient $\mathbb{R}$-linéaires en restrictions à chaque fibre.*
Les morphismes entre fibrés vectoriels sont les morphismes de fibrations qui sont linéaires en restriction à chaque fibre.

Définition 1.1.3. *(Fibré principal)*

Soit $p : E \to X$ une fibration, et G un groupe de Lie. On dit que E est un fibré principal si E est muni d'une action (lisse) à droite de G qui respecte la fibre, et qui agit de manière libre et transitive dessus (rappelons que cela veut dire qu'une fibre est l'orbite de n'importe quel point choisi dedans, et que les stabilisateurs de chaque point de la fibre sont triviaux).

Les morphismes entre fibrés principaux sont les morphismes de fibrations qui sont G-équivariants.

On appelera *section* d'une fibration $p : E \to X$, n'importe quelle application (lisse) $s : X \to E$ tel que $p \circ s = 1_X$. On notera $C_p^{\infty}(X, E)$ l'ensemble des sections de p. C'est evidement un sous espace de $C^{\infty}(X, E)$.

Il y a deja un moyen simple de faire un lien direct entre ces deux types de fibrés. Si F est un espace vectoriel (pas nécessairement complexe) muni d'une representation de G, alors on peut associer à tout fibré principal sur G, disons P, le fibré vectoriel $E_P = P \times_G F$, défini comme le quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence $(x.g, v) \sim (x, g.v)$ où l'on a encore noté $g.$ l'action de G sur F donné par la représentation (et que l'on aurait plutot du noter $\rho(g).v$).

Cette construction est (à l'evidence !) fonctorielle en les representations de G.

Il est facile de voir [1] qu'un fibré vectoriel (réel disons, car je vais souvent rester dans le cadre réel) E sur une base X est toujours un fibré associé à un $GL_n(\mathbb{R})$-fibré principal pour la representation naturelle de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ (où n est la dimension de la fibre de E). Ce fibré principal, est appelé le fibré des repères de E.

L'idée generale de la suite de ce laïus va etre d'ecrire un dictionnaire entre les notions developpés pour les fibrés vectoriels (notemment les notions de connexions) et les fibrés principaux, et de voir ainsi comment les differentes notions rencontrés dans la litterature se correspondent. Il n'y a là rien de bien profond, et je prefere avertir immediatement le lecteur que l'ensemble de mon laius sera plutot depourvu de veritable resultat non trivial (à l'exception peut etre de la dernière partie).

Mais avant de continuer présentons une légère generalisation de fibré principal, qui est souvent rencontrée en pratique, notament en physique, sous la forme d'action de symétries, mais aussi en maths, dans tous les contextes "équivariants".

Définition 1.1.4. *(Fibré G-équivariant)*

On dit qu'une fibration $E \to X$ est un fibré G-équivariant, ou simplement G-fibré, si G agit (à gauche) sur E et X de manière lisse et compatible.

A partir de là il est facile de définir la dérivée de Lie d'une section d'un G-fibré de la manière suivante.

Définition 1.1.5. *(Dérivée de Lie)*

1. Le lecteur me pardonnera je l'espere une telle fainéantise

Soit $E \to X$ un G-fibré. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, le fibré tangent TG de G etant trivial il s'identifie à $G \times \mathfrak{g}$. SOit T un element de $\mathfrak{g}$, on note $L(T)$ l'opérateur de $C_p^\infty(X, E)$ dans lui même, ainsi défini

$$L(T).s = \frac{d}{dt}(e^{tT}.s)\Big|_{t=0}$$

En fait cette construction se generalise aisément, si on se donne un champ de vecteur sur une variété X, il lui correspond alors un flot, qui est une famille à un paramètre de diffeomorphismes et dont l'existence en temps petit est assuré par le theoreme de Cauchy-Lipshitz (sur une variété compacte disons). Si l'on dispose d'une action de ces diffeomorphismes (ce qui est le cas dans la pratique) sur un fibré E qui soit compatible avec la projection, alors on peut definir la dérivée de Lie des sections de E, comme la dérivée en 0 de l'action du flot sur une section. C'est le cas pour tous les fibrés vectoriels sur X par exemple provenant d'une representation de GL_n, via la fibré des repère du fibré tangent qui est bien sur un GL_n-fibré principal. Dans le cas où la base X est un groupe de Lie, on retrouve la definition du crochet de Lie comme $[T, U] = L(T).U$ où je note toujours T le champ de vecteur invariant associé à $T \in \mathfrak{g}$, en effet pour le champ de vecteur invariant (à gauche) T, le flot de T (en 1) est donné par... l'exponentielle !

1.2 Connexions.

Nous allons maintenant definir une notion de connexion pour tous les objets introduits. Il y a plusieurs notions de connexions qui peuvent intervenir et nous allons voir qu'en fait elles sont toutes la "meme chose", mais vu sous des angles differents. L'idée de connexion est moralement toujours la meme, on veut pouvoir comparer les differentes fibres d'une fibration entre elles, avec le but (entre autres) de pouvoir *dériver les sections d'une fibration.* Un petit calcul bébéte montre que pour un fibré vectoriel, la définition naive que l'on souhaiterait prendre ne peut pas marcher, alors qu'elle marche par exemple dans le cas de fibrés holomorphes pour définir l'operateur $\overline{\partial}$ sur les sections lisses du dit fibré [2].

Commencons par le cas dont je pense qu'il est historiquement le premier à avoir emergé, le cas des fibrés vectoriels.

Définition 1.2.1. *(Connexion sur un fibré vectoriel.)*

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. On appelle connexion sur E tout opérateur, disons ∇^E, $\mathbb{R}$-linéaire de $C_p^\infty(X, E) \to \Omega^1(X, E)$, où $\Omega^1(X, E)$ désigne l'ensemble des 1-formes sur X à valeur dans E. Ce sont les sections de $TX^* \otimes E$. On impose de plus que ∇^E verifie la règle de Liebniz

$$\nabla^E(f.s) = df \otimes s + f.\nabla^E s$$

Nous montrerons un peu plus loin qu'un tel objet existe toujours. Voyons maintenant comment les géométres definissent la notion de connexion sur une fibration en general. Si

2. Eh oui, la géométrie complexe, c'est plus joli !

$E \to X$ est une fibration, alors nous avons une surjection de fibrés $TE \to p^*TX$, le noyau de ce morphisme est appele le fibré des vecteurs verticaux sur E, ce qui est tres visuel, je le noterai VE (sans plus de precision sur X et p). Le choix d'une connexion (que je serai tenté d'appeler une connexion géométrique sur E) est simplement le choix d'un supplementaire de VE dans TE.

Définition 1.2.2. *(Connexion géométrique)*
Si $p : E \to X$ est une fibration, on appelle connexion géométrique *sur E la donnée d'une section de la suite exacte*

$$0 \to VE \to TE \to p^*TX \to 0$$

On voit tout de suite qu'il est equivalent de se donner une telle section ou alors de se donner une 1-forme à coefficients dans VE ; en effet se donner une section de la suite exacte précedent revient à se donner un sous fibré HE de E tel que l'on ait $E = HE \oplus VE$, tel que $HE \to p^*TM$ soit un isomorphisme. Il revient au meme de se donner une 1-forme à coefficent dans VE qui agit trivialement sur les elements de VE dont le noyau s'identifie alors à HE, c'est simplement le fait que la projection sur A sous espace de W, parallèlement à B est l'unique application de W dans A verifiant $u^2 = u$, A etant alors le sous espace des invariants de u et B son noyau, une application de TE dans VE etant par définition une 1-forme à coefficient dans VE. Cela nous permet alors de formuler la definition suivante qui est une simple reformulation de la precedente

Définition 1.2.3. *(Connexion géométrique via une 1-forme)*
Si $E \to X$ est une fibration, alors une connexion géométrique sur E est la donnée d'une 1-forme sur E à valeur dans TE, disons $\omega \in \Omega^1(E, VE)$ telle que $\omega(T) = T$ pour tout element T de VE.

Nous prouverons plus bas qu'un connexion géométrique (via une 1-forme ou non) existe toujours sur une fibration.

Quid d'un fibré principal ? Hé bien un fibré principal c'est une fibration ! Bien sur on ne peut pas non plus ignorer l'action de G sur le fibré quand on choisit une connection dessus (enfin on peut, mais alors on oublie toute la G-structure), ce ne serait pertinent ni d'un point de vue physique ni d'un point de vue mathématiques. On demande alors simplement que la 1-forme de connection choisie soit G-équivariante[3]. Nous pouvons alors donner la définition suivante.

Définition 1.2.4. *(Connexion pour un fibré principal)*
Soir $P \to X$ un fibré principal, on appelle connexion (géométrique via une 1-forme) sur P la donnée d'une 1*-forme de connexion sur $P \to X$, assujétie au fait que ω soit invariante par G, i.e $\omega(T.g) = \omega(T)$ pour tout champ de vecteur T sur P.*

3. Oui, je sais, on l'avait vu venir

En fait on peut donner une definition équivalente qui tienne en compte d'une description simple du fibré VP sur P pour un fibré principal. C'est la definition usuelle que l'on trouve dans la litterature, par exemple dans le (magnifique) bouquin de Sharpe, Differential Geometry. Voyons comment faire

Proposition 1.2.5. *Nous avons un isomorphisme de de fibrés de $P \times \mathfrak{g}$ sur VP donné par l'application suivante*

$$\Psi : (T, x) \mapsto \left. \frac{d}{dt}(x.e^{tT}) \right|_{t=0}$$

Démonstration. Il suffit d'une part de verifier (par exemple) que si f est une fonction sur X, lisse, alors

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ p(x.e^{tT}) \right|_{t=0} = 0$$

ce qui est immédiat car la fonction que l'on dérive est constante. D'autre part, si v est un vecteur vertical, en un certain point x de P. Alors on peut trivialiser localement P comme $X \times G$ et $TP = TX \oplus (G \times \mathfrak{g})$, et v s'identifie alors canoniquement à un vecteur de $\mathfrak{g}$ disons u tel que l'image de $(u, p(v))$ par ψ est alors v. $\square$

Le fibré vertical à un fibré principal P est donc trivial et est simplement $P \times \mathfrak{g}$. Par suite se donner un 1-forme de connection à valeur dans VP est équivalent à se donner une 1-forme à valeur dans $P \times \mathfrak{g}$. Ce qui nous permet de formuler la definiion usuelle de connection sur un fibré principal.

Définition 1.2.6. *Une 1-forme de connexion sur un fibré principal P est la donnée d'une* 1 *forme ω sur P, invariante par G, à valeur*[4] *dans $\mathfrak{g}$. Celle ci est assujétie à la condition*

$$\omega(T) = T$$

pour tout T de $\mathfrak{g}$ (où l'on a identifié T au champ de vecteur "constant" lui correspondant dans VP)

Nous avons donc vu comment la definition classique de connexion sur un fibré principal est en fait un cas particulier de la notion de connexion (géométrique) pour une fibration. Nous allons maintenant faire le lien avec la notion de connexion sur un fibré vectoriel.

Avant cela, qu'il me soit permis de faire une petite parenthèse physique. Tout ces histoires de fibrations, ou sur des fibrés tangents peuvent etre vu comme une abstration du comportement de deux solides (lisses !) qu'on astreint à rouler l'un sur l'autre sans glisser. (Expliquer avec un dessin !). Les notions de connexions peuvent se voir comme une mesure de la dependance de la configuration qu'aura le solide mobile sur le solide fixe au chemin qu'on a suivi pour l'amener là. Par exemple il est facile de se convaincre que si l'on fait

4. nous utilisons la convention habituelle de langage suivante si E est une fibré vectoriel trivial de fibre F, alors on parle de forme à valeur dans F plutot que de forme à valeur dans $E = X \times F$

rouler sans glisser une tige sur un cercle, posée de manière tangente alors la position de la tige ne va pas dependre du chemin suivi (c'est lié au fait que le fibré tangent au cercle est trivial), alors que si on fait la meme chose avec une plaque posée sur un ballon, la position de la plaque à l'arivée va dépéndre nomément de la façon dont on deplace la plaque. Il y a une connexion naturelle sur les fibrations pour ce genre de probleme (qui est fixée par la condition "roulement sans glissement" et le fait que l'on vit dans $\mathbb{R}^3$) et qui mesure cette dependance.

Revenons à nos moutons. La donnée d'une connexion sur un fibré vectoriel E, que je noterai simplement ∇ permet de dériver les sections de E suivant une direction donnée par un champ de vecteurs, ou meme un vecteur en un point ; voyons comment.

Définition 1.2.7. *(Dérivée covariante)*

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel connecté par ∇, si on se donne s une section de E, alors on obtient un opérateur linéaire

$$\nabla(s) : C^{\infty}_{p_X}(TX) \to C^{\infty}_{p}(E)$$

où p_X désigne la projection $TX \to X$; si u est une section de TX (un champ de vecteur sur X donc) alors $\nabla(s)(u)$ est noté $\nabla_u s$ et est appelé la dérivée covariante de s selon u.

Nous avons vu qu'un fibré vectoriel E etait toujours le fibré associé à un GL_n fibré principal, son fibré des repères, noté $GL(E)$. Si l'on se donne une connection $\omega \in \Omega^1(GL(E), \mathfrak{gl}_n)$, comment transporter cette connexion en une connexion en bonne et due forme (au sens dérivée covariante) sur E ? Pour cela il nous faut examiner la structure des sections de E, en fonction de celles de $GL(E)$, ce qui n'est pas bien difficile.

Proposition 1.2.8. *Il y a un isomorphisme naturel entre $C^{\infty}(GL(E), \mathbb{R}^n)^{GL_n}$ et $C^{\infty}_p(X, E)$ donnée par l'envoie de f sur $f' : x \mapsto (y, f(y))$ pour n'importe quel choix de y dans la fibre de E au dessus de x.*

Démonstration. Assurons nous tout d'abord que la fleche est bien définie. Si l'on choisit y' plutot que y dans la fibre de E au dessus de X, alors $y' = y.g$ par transitivité de l'action de GL_n pour un certain g dans GL_n. Mais $(y.g, f(y')) = (y, g.f(y')) = y, f(y))$ car f est G-invariant. L'application definie est evidement injective et elle est surjective car si f est une section de E au dessus de X ; alors on obtient f' une applcation $GL(E) \to R^n$ donné par $f'(x) = p_2(f(x))$ où p_2 est la projection $E = GL(E) \times_{GL_n} \mathbb{R}^n$ sur le second factor. □

Notons que la preuve precedent s'adapte au cas de n'importe quel fibré E associé à un G-fibré principal P, via une representation $G \to \mathrm{Aut}(F)$. Appliquons ce resultat à la discussion précedente. On veut définir une connexion sur le fibré vectoriel E, en s'etant donné une 1-forme de connexion sur $GL(E)$, c'est a dire une 1-forme à valeur dans $\mathfrak{gl}_n$.

On pose pour tout section s de E, $\nabla(s) = [(d + \omega)\tilde{s}]$, où $\tilde{s}$ represente l'image de s dans $C^{\infty}(GL(E), \mathbb{R}^n)^{GL_n}$ via l'application du théorème précédent. Le crochet signifie que l'on voit cet element comme un element de $\Omega^1(E, \mathbb{R}^n)$.

1.3 Courbures.

2 Intégration, densités.