Table des matières

0.1 Sédénion Conique $\widehat{\mathbb{S}}$

0.1.1 Introduction

L'ensemble des sédénions coniques est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 16 qui est une variation sur les sédénions, et que l'on retrouve dans les travaux de Musès (niveau 3 des hypernombres de Musès).

Dans certains articles les sédénions coniques sont appelés *Sédénions*, ce qui peut être source de confusions ; c'est le cas en particulier dans les études qui suivent les travaux de Musès.

0.1.2 Définition

L'ensemble des sédénions coniques est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 16 qui peut se construire directement suivant certaines règles (cf. infra le mode de construction), ce qui justifie la notation utilisée ici $\widehat{\mathbb{S}}$, et l'écriture $z = \sum_{n=0}^{15} x_n \cdot e_n$ (où $e_0 = 1$), ou comme le produit $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, ce qui justifie le nom de *Octonions Complexes*, la notation $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, ou encore $\mathbb{O} \oplus i\mathbb{O}$, et l'écriture $z = o_0 + i \cdot o_1$. $\widehat{\mathbb{S}}$ est donc le résultat de la complexification des octonions.

Les sédénions coniques ne peuvent s'obtenir comme sous-algèbre de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, ni comme résultat de la méthode de Cayley-Dickson.

Par contre $\widehat{\mathbb{S}}$ peut facilement être reconnu dans une sous-algèbre de $\mathbb{M}_2(\mathbb{O})$, plus exactement, la sous-algèbre des matrices de la forme $\begin{pmatrix} o_1 & -o_2 \\ o_2 & o_1 \end{pmatrix}$ avec $(o_1, o_2) \in \mathbb{O}^2$

0.1.3 Mode de construction

$\widehat{\mathbb{S}}$ peut se construire avec les élements suivants :

- 1 élément de base réelle (noté 1 ou e_0).
- 7 éléments de base imaginaires (vérifiant $e_n^2 = -1$, pour n entre 1 et 7, comme d'habitude, nous noterons i, j et k les trois premiers).
- $< 1, i, j, k, e_4, e_5, e_6, e_7 >= \mathbb{O}$ (cette sous-base engendre les octonions).
- 7 éléments de base « contre-imaginaire » (vérifiant $e_n^2 = 1$, pour n entre 9 et 15).
- 1 élément de base « composé » noté e_8 vérifiant $e_8^2 = -1$ et $e_8 \cdot e_n = e_{n+8}$ pour n entre 0 et 7.

$\widehat{\mathbb{S}}$ est souvent décrite sous la forme suivante (en particulier par les mathématiciens qui suivent Musès) :

- 1 élément de base réelle (noté 1).
- 7 éléments de base imaginaires (vérifiant $i_n^2 = -1$, pour n entre 1 et 7.
- 7 éléments de base « contre-imaginaire » (vérifiant $\varepsilon_n^2 = 1$, pour n entre 1 et 7).
- 1 élément de base « composé » noté i_0 vérifiant $i_0^2 = -1$, $i_0 \cdot \varepsilon_n = i_n$ et $i_0 \cdot i_n = -\varepsilon_n$ pour n entre 1 et 7.

Si on considère les sédénions coniques comme $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, alors tout $s \in \widehat{\mathbb{S}}$ peut s'écrire : $s = o_1 + \mathfrak{i} \cdot o_2$, où $(1, \mathfrak{i})$ est une base d'une algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$ [1].

C'est à dire que la multiplication est définie par : $(o_1 + \mathfrak{i} \cdot o_2) \cdot (o_1' + \mathfrak{i} \cdot o_2') = o_1 o_1' - o_2 o_2' + \mathfrak{i} \cdot (o_1 o_2' + o_2 o_1')$ où les mutiplications $o_i o_j'$ sont tout simplement des multiplications entre octonions standard.

1. nous avons noté $\mathfrak{i}$ le nouveau générateur afin de ne pas le confondre avec le i de $\mathbb{O}$.

0.1.4 Table de multiplication

La table de multiplication ci-dessous est celle déduite des définitions ci-dessus ; celle de Musès est légèrement différente, mais isomorphe.

$\cdot$	1	i	j	k	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
1	1	i	j	k	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
i	i	-1	k	$-j$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$	e_{13}	$-e_{12}$	$-e_{15}$	e_{14}
j	j	$-k$	-1	i	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9	e_{14}	e_{15}	$-e_{12}$	$-e_{13}$
k	k	j	$-i$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$	e_{15}	$-e_{14}$	e_{13}	$-e_{12}$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	i	j	k	e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	$-e_8$	e_9	e_{10}	e_{11}
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-i$	-1	$-k$	j	e_{13}	e_{12}	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_9$	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-j$	k	-1	$-i$	e_{14}	e_{15}	e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{10}$	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-k$	$-j$	i	-1	e_{15}	$-e_{14}$	e_{13}	e_{12}	$-e_{11}$	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$
e_8	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	-1	$-i$	$-j$	$-k$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$
e_9	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$	e_{13}	$-e_{12}$	$-e_{15}$	e_{14}	$-i$	1	$-k$	j	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9	e_{14}	e_{15}	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-j$	k	1	$-i$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$	e_{15}	$-e_{14}$	e_{13}	$-e_{12}$	$-k$	$-j$	i	1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	$-e_8$	e_9	e_{10}	e_{11}	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	1	$-i$	$-j$	$-k$
e_{13}	e_{13}	e_{12}	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_9$	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	i	1	k	$-j$
e_{14}	e_{14}	e_{15}	e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{10}$	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	j	$-k$	1	i
e_{15}	e_{15}	$-e_{14}$	e_{13}	e_{12}	$-e_{11}$	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	k	j	$-i$	1

Table de multiplication de $\widehat{\mathbb{S}}$.

On peut facilement identifier quelques $\mathbb{R}$-algèbres de dimension 8 comme sous-algèbres de $\widehat{\mathbb{S}}$:

Les Octonions	$\mathbb{O}$	:	$< 1, i, j, k, e_4, e_5, e_6, e_7 >$
Les Octonions Fendus	$\not{\mathbb{O}}$	:	$< 1, i, j, k, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15} >$
Les BiQuaternions [2]	$\mathbb{B}$	:	$< 1, i, j, k, e_8, e_9, e_{10}, e_{11} >$

La table de multiplication ci-dessous reprend les conventions de Musès.

$\cdot$	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6	$-\varepsilon_1$	i_0	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_5	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_7$	ε_6
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	i_0	ε_1	ε_6	ε_7	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$	$-\varepsilon_3$	ε_2	$-\varepsilon_1$	i_0	ε_7	$-\varepsilon_6$	ε_5	$-\varepsilon_4$
i_4	i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_6$	$-\varepsilon_7$	i_0	ε_1	ε_2	ε_3
i_5	i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2	$-\varepsilon_5$	ε_4	$-\varepsilon_7$	ε_6	$-\varepsilon_1$	i_0	$-\varepsilon_3$	ε_2
i_6	i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$	$-\varepsilon_6$	ε_7	ε_4	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_2$	ε_3	i_0	$-\varepsilon_1$
i_7	i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1	$-\varepsilon_7$	$-\varepsilon_6$	ε_5	ε_4	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_2$	ε_1	i_0
i_0	i_0	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_6$	$-\varepsilon_7$	-1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
ε_1	ε_1	i_0	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_5	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_7$	ε_6	i_1	1	$-i_3$	i_2	$-i_5$	i_4	i_7	$-i_6$
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_3$	i_0	ε_1	ε_6	ε_7	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$	i_2	i_3	1	$-i_1$	$-i_6$	$-i_7$	i_4	i_5
ε_3	ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	i_0	ε_7	$-\varepsilon_6$	ε_5	$-\varepsilon_4$	i_3	$-i_2$	i_1	1	$-i_7$	i_6	$-i_5$	i_4
ε_4	ε_4	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_6$	$-\varepsilon_7$	i_0	ε_1	ε_2	ε_3	i_4	i_5	i_6	i_7	1	$-i_1$	$-i_2$	$-i_3$
ε_5	ε_5	ε_4	$-\varepsilon_7$	ε_6	$-\varepsilon_1$	i_0	$-\varepsilon_3$	ε_2	i_5	$-i_4$	i_7	$-i_6$	i_1	1	i_3	$-i_2$
ε_6	ε_6	ε_7	ε_4	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_2$	ε_3	i_0	$-\varepsilon_1$	i_6	$-i_7$	$-i_4$	i_5	i_2	$-i_3$	1	i_1
ε_7	ε_7	$-\varepsilon_6$	ε_5	ε_4	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_2$	ε_1	i_0	i_7	i_6	$-i_5$	$-i_4$	i_3	i_2	$-i_1$	1

Table de multiplication de $\widehat{\mathbb{S}}$ à la mode de Musès.

Sous cette dernière forme, on peut calculer quelques fonctions (dans ce qui suit, $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{lll}
e^{\varepsilon_n \alpha} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n^k \alpha^k}{k!} & \text{Définition de l'exponentielle} \\
 & = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_n^{2k} \alpha^{2k}}{(2k)!} + \frac{\varepsilon_n^{2k+1} \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) & \text{Ré-écriture de la somme.} \\
 & = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(\varepsilon_n^2)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} + \frac{\varepsilon_n (\varepsilon_n^2)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) & \text{Associativité des puissances.} \\
 & = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \right) + \varepsilon_n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) & \varepsilon_n^2 = 1. \\
 & = \operatorname{ch}(\alpha) + \varepsilon_n \operatorname{sh}(\alpha) & \text{Définition de ch et de sh.}
\end{array}$$

Calcul de $e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)}$

Par définition de l'exponentielle par des séries entières : $e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \cdot \frac{(i_0 - i_n)^k}{k!}$

Afin de simplifier cette expression nous devons établir quelque résultats simples :

$$\begin{array}{lllllll}
(i_0 - i_n)^0 & = & 1 & & & & \\
(i_0 - i_n)^1 & = & i_0 - i_n & & & & \\
(i_0 - i_n)^2 & = & i_0^2 - i_0 i_n - i_n i_0 + i_n^2 & = & -2(1 - \varepsilon_n) & & \\
(i_0 - i_n)^3 & = & -2(1 - \varepsilon_n)(i_0 - i_n) & = & -2(i_0 - i_n - \varepsilon_n i_0 + \varepsilon_n i_n) & = & -4(i_0 - i_n)
\end{array}$$

Ces relations permettent de démontrer, pour $k > 0$:

$(i_0 - i_n)^{k+2} = (i_0 - i_n)^{k-1}(i_0 - i_n)^3 = (i_0 - i_n)^{k-1}(-4)(i_0 - i_n) = (-4)(i_0 - i_n)^k$

et en particulier :

$(i_0 - i_n)^{2k+1} = (-4)^k (i_0 - i_n)$
$(i_0 - i_n)^{2k+2} = (-4)^k (i_0 - i_n)^2 = (-2)(-4)^k (1 - \varepsilon_n)$

Ces résultats permettent d'écrire :

$$e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^0 \frac{(i_0 - i_n)^0}{0!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{(i_0 - i_n)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \frac{(i_0 - i_n)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{(-4)^k (i_0 - i_n)}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \frac{(-2)(-4)^k (1 - \varepsilon_n)}{(2k+2)!}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = 1 + (i_0 - i_n) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{(-4)^k}{(2k+1)!} + (1 - \varepsilon_n) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \frac{(-2)(-4)^k}{(2k+2)!}$$

On rappelle les définitions suivantes :

$\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$

$\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{(-4)^k}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{2(2k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} \sin(\pi)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \frac{(-2)(-4)^k}{(2k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \frac{(-1)^{k+1} (2)^{2k+2}}{2(2k+2)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) - 1)$$

Ce qui donne au final :

$e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = 1 + \dfrac{(i_0 - i_n)}{2} \sin(\pi) + \dfrac{1 - \varepsilon_n}{2}(\cos(\pi) - 1)$ d'où $e^{\frac{\pi}{2}(i_0 - i_n)} = 1 + 0 - (1 - \varepsilon_n) = \varepsilon_n$

0.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Si l'on écrit les octonions complexes sous la forme $z = o_0 + i \cdot o_1$, trois définitions de conjugaisons paraissent naturelles, nous les noterons $\dagger_1, \dagger_2$, et $\dagger_3$:

$$\begin{array}{rcll} z^{\dagger_1} & = & \overline{o_0} + i \cdot \overline{o_1} & \text{(Conjugaison octonionique)} \\ z^{\dagger_2} & = & o_0 - i \cdot o_1 & \text{(Conjugaison complexe)} \\ z^{\dagger_3} & = & \overline{o_0} - i \cdot \overline{o_1} & \text{(Conjugaison hermitienne)} \end{array}$$

Où $\overline{o_i}$ désigne la conjugaison standard sur $\mathbb{O}$.

En posant $o_0 = \sum_{n=0}^{7} x_n \cdot e_n$ et $o_1 = \sum_{n=0}^{7} x_{n+8} \cdot e_n$ (où $e_0 = 1$), on peut définir une pseudo-norme qui possède l'excellent qualité d'être multiplicative : $|z| = \sqrt[4]{zz^{\dagger_1}z^{\dagger_2}z^{\dagger_3}}$

La définition donne directement, en posant $z = z_0 + \mathrm{i} z_1$:

$$|z|^4 = (z_0\overline{z_0} - z_1\overline{z_1})^2 + 2\left((z_1\overline{z_0})\overline{(z_1\overline{z_0})} + \overline{(z_1\overline{z_0})\overline{(z_1\overline{z_0})}}\right)$$

Ce qui, après quelques calculs élémentaires donne :

$$|z| = \sqrt[4]{zz^{\dagger_1}z^{\dagger_2}z^{\dagger_3}} = \sqrt[4]{\left(\sum_{n=0}^{7} x_n^2 - \sum_{n=8}^{15} x_n^2\right)^2 + 4\left(x_0x_8 - \sum_{n=1}^{7} x_n x_{n+8}\right)^2}$$

0.1.6 Propriétés algébriques

$(\widehat{\mathbb{S}}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 16 qui est non commutative, non associative $((i \cdot e_4) \cdot e_7 = e_5 \cdot e_7 = j\,;\, i \cdot (e_4 \cdot e_7) = i \cdot k = -j)$, mais altenative et flexible et possédant une pseudo-norme multiplicative. De plus $\widehat{\mathbb{S}}$ contient des éléments particuliers.

Avec les notations standard des hypercomplexes :

$$\begin{array}{lcl} \text{Eléments idempotents} & : & \left(\dfrac{1+e_9}{2}\right)^2 = \dfrac{1+e_9+e_9+e_9^2}{4} = \dfrac{1+e_9}{2} \\ \text{Diviseurs de 0} & : & (\sqrt{3}+i+2e_{10})(-\sqrt{3}+i+2e_{10}) = (i+2e_{10})^2 - 3 = \\ & & i^2 + 4e_{10}^2 + 2(ie_{10} + e_{10}i) - 3 = \\ & & -1 + 4 + 2(e_{11} - e_{11}) - 3 = 0 \\ \text{Eléments nilpotents} & : & (i+e_{10})^2 = i^2 + ie_{10} + e_{10}i + e_{10}^2 = -1 + e_{11} - e_{11} + 1 = 0 \end{array}$$

Avec les notations de Musès [3] :

$$\begin{array}{lcl} \text{Eléments idempotents} & : & \left(\dfrac{1\pm\varepsilon_n}{2}\right)^2 = \dfrac{1\pm\varepsilon_n\pm\varepsilon_n+\varepsilon_n^2}{4} = \dfrac{2\pm2\varepsilon_n}{4} = \dfrac{1\pm\varepsilon_n}{2} \\ \text{Diviseurs de 0} & : & ((1+i_0)+(i_k+\varepsilon_k))((1+i_0)-(i_k+\varepsilon_k)) = (1+i_0)^2 - (i_k+\varepsilon_k)^2 = \\ & & (1^2+2i_0+i_0^2) - (i_k^2+2i_0+\varepsilon_k^2) = 0 \\ \text{Eléments nilpotents} & : & \text{pour } n \neq m : (i_m \pm e_n)^2 = i_m^2 \pm (\varepsilon_k - \varepsilon_k) + \varepsilon_n^2 = -1+1 = 0 \end{array}$$

Au prix de quelques calculs supplémentaires on peut montrer que [4] pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 = b^2 + c^2$

$$(a(1+i_0) + b(i_1+\varepsilon_1) + c(i_2+\varepsilon_2))(a(1+i_0) - b(i_1+\varepsilon_1) - c(i_2+\varepsilon_2)) = 0$$

3. 1 et i_0 commutent avec tout
4. Ce n'est pas la forme la plus générale des diviseurs de 0 des Sédénions Coniques

0.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les sédénions coniques sont aussi appelés Octonions complexes (cf. les modes de construction, ci-dessus), mais aussi BiOctonions.

Ils forment aussi une M-algèbre de Musès (de niveau 3) et de dimension 16.

0.1.8 Utilisation en physique

- Equation de la conservation de l'énergie électromagnétique locale.
- Opérateurs de spin 1/2.
- Gravité quantique.
- L'électromagnétisme, peut s'exprimer avec les Octonions Fendus ($\mathbb{O}$), et la gravité quantique euclidienne en dimension 4 peut s'exprimer avec les Octonions Circulaires (c'est à dire les Octonions standard $\mathbb{O}$), deux sous-algèbres des Sédénions coniques ($\widehat{\mathbb{S}}$), d'où l'idée de les unir.

0.1.9 Références

1. J. Köplinger, *Gravity and electromagnetism on conic sedenions*, Applied Mathematics and Computation, 2006.
2. M. E. Kansu, M. Tanişli & S. Demir, *Electromagnetic energy conservation with complex octonions*, Turkish Journal of Physics, volume 36, pages 438 – 445, 2012.