Table des matières

.1 Réels définissables, calculables

.1.1 Introduction

La notion de nombre entier *définissable* devient nécessaire face à quelques paradoxes (bien connus) :

- Soit « n est le plus petit nombre entier qui ne soit pas définissable en moins de vingt mots ». La définition précédente de n tient en moins de vingt mots, ce qui est une contradiction.
- Soit I l'ensemble des nombres entiers n'ayant rien de remarquable. Comme tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$, I possède un plus petit élément, qui est donc le plus petit entier n'ayant rien de remarquable, ce qui le rend ... remarquable.

Ces deux paradoxes montrent que la notion de définissabilité est trop floue pour être vraiment utile et qu'elle nécessite une définition formelle.

La notion de nombre *calculable* est moins intuitive, en effet, selon que l'on pense que pour qu'un nombre réel soit calculable on doit pouvoir écrire effectivement toutes ses décimales, et un nombre aussi banal que $\frac{1}{3}$ ne serait pas calculable ; ou au contraire que l'on pense que pour qu'un nombre réel soit calculable on doit pouvoir écrire toutes ses décimales, éventuellement en un temps infini et alors tous les réels sont calculables (si x est un réel tel que $x \in [0, 1[$, alors il suffit d'écrire la première décimale de x, puis la deuxième, puis ...).

Ces deux pseudo-définitions (très naïves) sont trop floues pour être vraiment utiles, et montrent que la notion de calculabilité nécessite une définition formelle.

.1.2 Définition

Un nombre réel α est *définissable* au premier ordre dans le langage de la théorie des ensembles [1] ($\mathcal{L}(\in, =)$) s'il existe une formule $\varphi(x)$ du premier ordre dans le langage $\mathcal{L}(\in, =)$, telle que α soit le seul nombre réel vérifiant $\varphi(\alpha)$.

Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une machine de Turing [2] qui, lorsqu'on lui donne un entier n en entrée, se termine en un temps fini et donne la $n^{\text{ième}}$ décimale de α.

.1.3 Exemples de nombres définissables et calculables

Les entiers naturels, donc les relatifs, donc les rationnels sont définissables, et, bien sûr, les constantes mathématiques utilisées par les mathématiciens sont définissables.

Les entiers naturels, donc les relatifs, donc les rationnels sont calculables, et la très grosse majorité des constantes utilisées par les mathématiciens est calculable : $\sqrt{2}, e, \pi$ en sont des exemples.

.1.4 Opérations

On peut remarquer immédiatement que les nombres réels définissables possèdent quelques propriétés simples :

1. On peut associer un nombre de Gödel à chaque formule du premier ordre dans le langage des corps ordonnés, celles qui permettent effectivement de calculer un réel sont donc en nombre au plus dénombrable, et comme tous les entiers sont définissables, l'ensemble des réels définissables est bien de cardinal $\aleph_0$, autrement dit « presque tous » les réels ne sont pas définissables.
2. α et β définissables $\Rightarrow \alpha + \beta$ définissable.
3. α et β définissables $\Rightarrow \alpha \times \beta$ définissable.
4. α définissable $\Rightarrow -\alpha$ définissable.

1. On peut donner d'autres définitions, simplement en changeant le langage (et choisir celui de l'arithmétique par exemple) ou la logique (et choisir le 2^{nd} ordre), ou en autorisant des paramètres dans la formule.
2. Il existe de nombreuses autres définitions équivalentes, certaines sont citées dans la section « Synonymes, Isomorphismes, Exemples ».

5. α définissable et non nul $\Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ définissable.

On peut remarquer immédiatement que les nombres réels calculables possèdent quelques propriétés simples (dont certaines sont triviales avec la définition donnée là) :

1. On peut associer un nombre de Gödel à chaque machine de Turing, celles qui permettent effectivement de calculer un réel sont donc en nombre au plus dénombrable, et comme tous les entiers sont calculables, l'ensemble des réels calculables est bien de cardinal $\aleph_0$, autrement dit « presque tous » les réels ne sont pas calculables.
2. α et β calculables $\Rightarrow \alpha + \beta$ calculable.
3. α et β calculables $\Rightarrow \alpha \times \beta$ calculable.
4. α calculable $\Rightarrow -\alpha$ calculable.
5. α calculable et non nul $\Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ calculable.

Par contre l'ensemble des nombres calculables ne possède pas la propriété de la borne supérieure. Un contre exemple est donné par les **suites de Specker** :

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une énumération des machines de Turing.
Soit x_n un nombre réel dont la $k^{\text{ième}}$ décimale vaut :

$$\begin{cases} 3 \text{ si } k \geq n. \\ 4 \text{ si } k < n \text{ et } T_k(k) \text{ se termine après } n-k+1 \text{ étapes.} \\ 3 \text{ si } k < n \text{ et } T_k(k) \text{ ne se termine pas après } n-k+1 \text{ étapes.} \end{cases}$$

On peut montrer :

1. Pour tout n, x_n est un nombre rationnel (périodique à partir d'un certain rang).
2. Chaque élément de la suite est calculable puisque rationnel, on peut aussi remarquer que le passage de x_n à x_{n+1} nécessite au plus $n+1$ étapes (une étape pour chacune des n machines de Turing (T_1 à T_n), et 1 étape pour la machine T_{n+1}.
3. La suite est croissante (le passage de x_n à x_{n+1} ne peut changer que des 3 en 4).
4. La suite est majorée (par $0.\underline{4} = \dfrac{4}{9}$).
5. La limite de la suite n'est pas calculable (sinon le problème de l'arrêt diagonal [3] serait décidable)

Un résultat plus inattendu : la relation d'ordre entre nombres réels calculables n'est pas calculable (il n'est pas possible de savoir, par avance, combien de décimales de α et de β il faut calculer pour savoir lequel est le plus grand), pour la même raison, l'égalité entre nombres calculables n'est pas calculable.

Par exemple, il n'existe pas de machine de Turing dépendant d'un réel x et qui réponde 1 si $x < 0$ et 0 si $x \geq 0$, en effet pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des réels définissables dans l'intervalle $]-\varepsilon; \varepsilon[$ et donc une approximation de x à ε près ne permet pas de savoir si x est positif ou négatif.

Les nombres réels calculables sont a fortiori définissables, mais le contraire n'est pas toujours vrai :

La constante Ω de Chaitin est l'exemple le plus connu, un autre exemple est la limite de la suite de Specker vue ci-dessus.

.1.5 Propriétés algébriques

Munis des opérations usuelles héritées de $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels calculables, ainsi que l'ensemble des réels définissables sont des corps commutatifs dénombrables (c'est à dire de cardinal $\aleph_0$), ce sont même des corps réels clos.

Une analyse calculable (computable analysis) a été développée (cf. les références ci-dessous) en particulier par Klaus Weihrauch.

3. Arrêt diagonal : Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une énumération des machines de Turing, il n'existe pas d'algorithme capable de décider si $T_k(k)$ s'arrête ou non.

.1.6 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Au lieu de donner une définition utilisant les machines de Turing, on aurait pu donner d'autres définitions équivalentes utilisant la notion de fonctions récursives (ce qui nécessite une définition formelle) :

1. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une fonction récursive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ elle produise un entier k tel que :
$$\frac{k-1}{n} \leq \alpha \leq \frac{k+1}{n}$$
2. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une fonction récursive telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^\star$ elle produise un rationnel a tel que :
$$|\alpha - a| \leq \varepsilon$$
3. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une suite récursive de rationnels $(r_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ convergeant vers α telle que pour tout i
$$|r_{i+1} - r_i| < 2^{-i}$$

Autrement dit il existe une fonction récursive qui permet d'approcher α avec la précision que l'on veut.

Une autre définition (qui donne le même résultat) utilise les « coupures de Dedekind calculable », c'est à dire les fonctions calculables Ded vérifiant :

- Ded : $\mathbb{Q} \mapsto \{0, 1\}$
- $\exists x(\mathrm{Ded}(x) = 0)$
- $\exists x(\mathrm{Ded}(x) = 1)$
- $\forall x\, \forall y\, (((\mathrm{Ded}(x) = 0) \wedge (\mathrm{Ded}(y) = 1)) \Rightarrow (x < y))$
- $\forall x\, ((\mathrm{Ded}(x) = 0) \to \exists y\, ((y > x) \wedge (\mathrm{Ded}(y) = 0)))$

Par exemple la fonction qui à un rationnel $\frac{p}{q}$, renvoie 0 si $p^2 < 2q^2$ et 1 sinon, est une Coupure de Dedekind qui montre que $\sqrt{2}$ est calculable.

On aurait pu aussi donner des définitions pour les nombres complexes : un nombre complexe est définissable ou calculable, si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

.1.7 Fonctions récursives

On appelle fonctions de base, les fonctions (qui peuvent être partielles) suivantes [4] :

- Les fonctions nulles $o : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définies par $o(\overline{\alpha}) = 0$.
- La fonction successeur $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $s(n) = n + 1$.
- Les fonctions $i^{\text{ième}}$ projection $\pi_i : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définies par $\pi_i(\overline{\alpha}) = \alpha_i$.

On appelle fonctions récursives primitives la plus petite classe contenant les fonctions de base et close pour l'application un nombre fini de fois des opérateurs suivants :

- La composition d'application : si $(f_i : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N})_{0<i\leq l}$ et $g : \mathbb{N}^l \mapsto \mathbb{N}$, alors la composée des f_i et de g est l'application : $c : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définie par $c(\overline{\alpha}) = g(f_1(\overline{\alpha}), f_2(\overline{\alpha}), \cdots, f_l(\overline{\alpha}))$.
- La récursion primitive : soit $f : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N}^{k+2} \mapsto \mathbb{N}$, alors la *récursée* de f et g est la fonction $h : \mathbb{N}^{k+1} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} h(\overline{\alpha}, 0) & = & f(\overline{\alpha}) \\ h(\overline{\alpha}, p+1) & = & g(\overline{\alpha}, p, h(\overline{\alpha}, p)) \end{array} \right.$.

La classe des fonctions primitives récursives contient des fonctions qui sont calculables, mais il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives : par exemple la fonction d'Ackermann (cf. *Fonctions récursives et machine de Turing*).

On appelle classe des fonctions récursives la plus petite classe contenant les fonctions primitives récursives et close par minimisation non bornée :

- Soit la fonction $f : \mathbb{N}^{k+1} \mapsto \mathbb{N}$, alors la minimisation (non bornée) de f est la fonction $m : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définie par $m(\overline{\alpha})$ = le plus petit i tel que $f(\overline{\alpha}, i) = 0$, et pour tous $j < i$, $f(\overline{\alpha}, j)$ est défini si ce i existe, et n'est pas définie sinon.

La fonction d'Ackermann citée ci-dessus est bien récursive.

Nous en profitons pour rappeler la *thèse de Church-Turing* (qui n'est donc pas un théorème) : La classe des fonctions récursives est exactement la classe des fonctions calculables par un algorithme quelconque.

4. les éléments de $\mathbb{N}^k$ sont notés $\overline{\alpha}$

.1.8 Utilisation en physique

L'ensemble de cette problématique ne concerne que les mathématiciens et même de façon plus précise les logiciens.

.1.9 Références

Le document de Mariou est très concis, une seule page, plus utile comme aide-mémoire que comme outil d'apprentissage.

1. B. Mariou, *Fonctions Récursives*, Université Paris 8, 2005.
2. N. Le Thanh, *Fonctions récursives et machine de Turing*, Université de Nice Sophia Antipolis, 2008.
3. A. Turing,*On Computable Numbers, With An Application To The Entscheidungsproblem*, Proceedings London Mathematical Society, Volume 2 - 42, pages 230 - 265, 1936 - 1937.
4. J. Ferreirós, *The Crisis in the Foundations of Mathematics*, The Princeton Companion to Mathematics, Timothy Gowers Editeur, Princeton University Press, pages 142 - 156, 2008.
5. C. H. Bennett, *On Random and Hard-to-Describe Numbers*, IBM Watson Research Center Yorktown Heights, 1979.
6. K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 288 pages, 2000.
7. É. Janvresse, T. de la Rue, *La face cachée des nombres*, Université de Rouen (CNRS), 2007.