Table des matières

.1 Nombres Duaux $\mathbb{D}_1$

.1.1 Introduction

Les nombres Duaux ont été introduits par William Kingdon Clifford en 1873 et c'est Eduard Study (1962-1930), un mathématicien allemand qui développa leur usage en mécanique.

Les nombres duaux sont une des trois algèbres hypercomplexes de dimension 2 (cf nombres complexes et nombres complexes fendus).

L'ensemble des nombres duaux est parfois noté $\mathbb{C}_0$ (avec les mêmes notations, l'ensemble des nombres complexes peut être noté $\mathbb{C}_{-1}$, et l'ensemble des nombres complexes fendus, $\mathbb{C}_1$), il est aussi appelé ensemble des nombres complexes paraboliques. Nous noterons l'ensemble des nombres duaux $\mathbb{D}_1$ (dualisation de $\mathbb{R}$) pour être cohérent avec la notation des complexes duaux ($\mathbb{D}_2$), quaternions duaux ($\mathbb{D}_4$) etc.

$\mathbb{D}_1$ correspond à la géométrie Galiléenne.

.1.2 Définition

Les nombres duaux sont des nombres hypercomplexes de la forme $z = a_0 + a_1.e_1$, où $a_i \in \mathbb{R}$ et $e_1^2 = 0$. a_0 est appelée la partie réelle et a_1 la partie duale de z.

Usuellement e_1 est noté ε, c'est un élément nilpotent.

.1.3 Mode de construction

L'ensemble des nombres duaux peut donc être construit comme un ensemble hypercomplexe

L'ensemble des nombres duaux peux aussi être construit comme $\mathbb{R}[X]/X^2$, c'est-à-dire le quotient de l'anneau des polynômes réels par l'idéal principal engendré par le polynôme X^2 ; cette construction est généralisable à partir de n'importe quel anneau en place de $\mathbb{R}$.

Le nombres duaux ne sont pas une algèbre de Clifford.

.1.4 Table de multiplication

$+$	1	ε
1	1	ε
ε	ε	0

L'exponentielle est définie comme la série entière (où E est un ensemble de « nombres ») :

$\forall x \in E,\, e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Dans le cas des nombres duaux on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}\, (e^{x\varepsilon} = 1 + x\varepsilon)$

Par analogie avec le résultat usuel pour les nombres complexes, on peut définir le cosinus parabolique (cosp) et le sinus parabolique (sinp) :

- $\mathrm{cosp}(x) = 1$
- $\mathrm{sinp}(x) = x$

Il est facile de vérifier que la formule de De Moivre reste vraie (mais pas vraiment passionante), pour x un réel :

$(\mathrm{cosp}(x) + \varepsilon\,\mathrm{sinp}(x))^n = \mathrm{cosp}(nx) + \varepsilon\,\mathrm{sinp}(nx)$

.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Pour $z = a_0 + a_1.\varepsilon$ alors $\overline{z} = a_0 - a_1.\varepsilon$. La conjugaison est un automorphisme d'ordre 2.
Le module de z, $|z|^2 = z.\overline{z} = a_0^2$ est multiplicatif $|z \cdot z'| = |z||z'|$, mais ce n'est pas une norme.

Le cercle unité, qui est défini par $|z| = 1$, consiste donc, dans le plan dual, à l'ensemble tel que $a_0^2 = 1$, c'est à dire que le cercle unité dans le plan dual est constitué de deux droites ($a_0 = 1$ et $a_0 = -1$).

Tous les nombres duaux n'ont pas d'inverse, un nombre dual est inversible si et seulement si son module est différent de 0, c'est-à-dire si sa partie réelle est différente de 0 et dans ce cas :
$z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, c'est à dire : $z^{-1} = \dfrac{1}{a_0} - \dfrac{a_1}{a_0^2}\varepsilon$.

On peut noter que la multiplication de z par un nombre dual de module 1, conserve le module de z : $|z \cdot e^{x \cdot \varepsilon}| = |z|$, autrement dit cette multiplication conserve $z \cdot \overline{z} = a_0^2$, autrement dit, toute parabole d'équation $a_0^2 = k$ est globalement invariante par une multiplication par un nombre dual de module 1, d'où le nom de nombres paraboliques que l'on utilise parfois à la place de nombres duaux.

Représentation polaire (pour $a_0 \neq 0$) : $a_0 + a_1\varepsilon = a_0\left(1 + \dfrac{a_1}{a_0}\varepsilon\right)$.

Représentation exponentielle (pour $a_0 \neq 0$) : $a_0 + a_1\varepsilon = a_0 e^{\frac{a_1}{a_0}\varepsilon}$

La géométrie associée à $\mathbb{D}_1$ est appelée « parabolique » , et pour cette géométrie, le « cercle unité », c'est à dire l'ensemble des points tels que $|z| = 1$, est constituée de deux droites parallèles à l'axe des ordonnées.

.1.6 Propriétés algébriques

Les nombres duaux sont une algèbre associative, unitaire, commutative de dimension deux sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{D}_1$, le plan complexe parabolique correspond au plan de Laguerre.

.1.7 Autres propriétés

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P[X] = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, on peut alors calculer

$$P(a_0 + a_1\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} p_k(a_0 + a_1\varepsilon)^k = \sum_{k=0}^{n} p_k(a_0)^k + \sum_{k=1}^{n} kp_k a_0^{k-1} a_1\varepsilon$$

Autrement dit :

$$P(a_0 + a_1\varepsilon) = P(a_0) + a_1 P'(a_0)\varepsilon$$

D'une façon plus générale, soit f une fonction qui admet un développement en série de Taylor au voisinage de a_0, alors

$$f(a_0 + a_1\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1\varepsilon)^n f^{(n)}(a_0)}{n!} = f(a_0) + a_1 f'(a_0)\varepsilon.$$

Ce résultat permet de mettre en place des algorihme de calcul de la dérivée première très performant et très facile à implémenter, puisqu'il n'est pas utile de développer une outil de dérivation formelle, il suffit d'appliquer les règles de calcul dans les nombres duaux :

On peut démontrer facilement, avec le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\sin(x + \varepsilon) &= \sin(x) + \varepsilon\cos(x) \\
\cos(x + \varepsilon) &= \cos(x) - \varepsilon\sin(x) \\
e^{(x+\varepsilon)} &= e^x + \varepsilon e^x \\
\ln(x + \varepsilon) &= \ln(x) + \varepsilon\frac{1}{x} \\
\frac{1}{x + \varepsilon} &= \frac{1}{x} - \varepsilon\frac{1}{x^2} \\
\sqrt{x + \varepsilon} &= \sqrt{x} + \varepsilon\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Ainsi que toutes les formules de base qui peuvent être utile, puis pour calculer la dérivée d'une fonction, aussi compliquée soit-elle, il suffit d'appliquer les règles de calcul simples ci-dessus.

.1.8 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les nombres duaux peuvent être représentés par des matrices de $M_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, cette représentation n'est pas unique, en effet les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ conviennent tout aussi bien

Les nombres duaux peuvent aussi se construire comme le quotient de l'ensemble des polynômes réels à une indéterminée quotienté par l'idéal généré par le polynôme X^2 : $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ (les propriétés algébriques ci-dessus se démontrent très facilement avec cette définition).

.1.9 Utilisation en physique

Les nombres duaux sont utilisés pour représenter un superespace [1], la direction le long de l'axe ε est dit « fermionique », l'axe réel définissant la direction « bosonique ».

Liste de domaines où les nombres duaux sont utilisés :

- Rigid body motion.
- Displacement analysis of spatial mechanisms.
- Robotics.
- Surface shape analysis and computer graphics.
- Human body motion analysis.
- Kinematic synthesis.
- Dynamic analysis.

.1.10 Références

1. I. M. Yaglom, *A Simple Non-Euclidean geometry and its Physical Basis*, Springer-Verlag, New York, 1979.
2. E. Pennestri & R. Stefanelli, *Linear Algebra and Numerical Algorithms Using Dual Numbers*, Multibody System Dynamics, Volume 18, N° 3, pages 323 - 344, 2007.
3. W. B. V. Kandasamy & F. Smarandache, *Dual Numbers*, Zip Publishing, Ohio, 160 pages, 2012.

1. Espace utilisé par les physiciens pour exprimer la supersymétrie.