.1 Hyper-Nombres de Burgin $\mathbb{C}_\omega$ & $\mathbb{R}_\omega$

.1.1 Introduction

Les hypernombres (qui sont notés $\mathbb{R}_\omega$ pour les hypernombres réels et $\mathbb{C}\omega$ pour les hypernombres complexes), ont été introduits par Mark Burgin, mathématicien russe, dans le but de donner un cadre à la résolution de certaines Equations Différentielles Partielles, en mettant en place des fonctions généralisées (différentes des distributions) appelées extrafonctions.

L'idée fondatrice est de formaliser une notion de limite pour toutes les suites (réelles et complexes), même pour celles qui ne convergent pas (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

.1.2 Définition

Les hypernombres sont obtenus en quotientant une certaine famille de suite, par une relation d'équivalence, de la même façon que l'on peut obtenir les nombres réels en quotientant les suites de Cauchy de nombres rationnels, par une relation d'équivalence cf. : Construction de $\mathbb{R}$ par les Suites de Cauchy.

Contrairement aux Hyperréels, les hypernombres ne contiennent pas d'infinitésimaux.

.1.3 Mode de construction

Soit $\begin{cases} \mathbb{C}^\omega & = & \{(x_i)_{i\in\omega} \,|\, x_i \in \mathbb{C}\} \\ \mathbb{R}^\omega & = & \{(x_i)_{i\in\omega} \,|\, x_i \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{Q}^\omega & = & \{(x_i)_{i\in\omega} \,|\, x_i \in \mathbb{Q}\} \end{cases}$

C'est à dire que $\mathbb{Q}^\omega$ est l'ensemble des suites de nombres rationnels, $\mathbb{R}^\omega$ est l'ensemble des suites de nombres réels et $\mathbb{C}^\omega$ est l'ensemble des suites de nombres complexes, et ce sans aucune restriction.

Soit la relation, notée $\sim$ définie sur chacun de ces ensembles et définie par :

$$\forall a \in \mathbb{C}^\omega(\text{resp. } \mathbb{R}^\omega,\, \mathbb{Q}^\omega)\forall b \in \mathbb{C}^\omega(\text{resp. } \mathbb{R}^\omega,\, \mathbb{Q}^\omega)\left((a \sim b) \Leftrightarrow \left(\lim_{i\to\infty} |a_i - b_i| = 0\right)\right)$$

La symétrie et la réflexivité de $\sim$ sont très faciles à démontrer, pour la transitivité, il suffit d'utiliser : $|a_i - b_i + b_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i|$, on démontre ainsi que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Il est donc naturel de considérer les ensembles de classes d'équivalence : $\begin{cases} \mathbb{C}_\omega & = & \mathbb{C}^\omega/\sim \\ \mathbb{R}_\omega & = & \mathbb{R}^\omega/\sim \\ \mathbb{Q}_\omega & = & \mathbb{Q}^\omega/\sim \end{cases}$

Une première remarque s'impose : soit $(x_i)_{i\in\omega}$ une suite de réels quelconques, alors la suite définie par $\left(\dfrac{\lfloor 10^i x_i \rfloor}{10^i}\right)_{i\in\omega}$ est une suite de rationnels telle que $(x_i)_{i\in\omega} \sim \left(\dfrac{\lfloor 10^i x_i \rfloor}{10^i}\right)_{i\in\omega}$.

Autrement dit, toute suite de réels est équivalente (pour $\sim$) à une suite de rationnels, c'est à dire que $\mathbb{Q}_\omega = \mathbb{R}_\omega$

Bien sûr, il est possible d'établir un plongement naturel de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_\omega$ que nous noterons $\varphi : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_\omega$ défini par $\varphi(x) = \overline{(x)_{i\in\omega}}$ où $(x)_{i\in\omega}$ désigne la suite constante égale à x, et $\overline{(x_i)_{i\in\omega}}$ désigne la classe de $(x_i)_{i\in\omega}$ pour la relation $\sim$. De la même façon, on peut définir $\psi : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}_\omega$ par $\varphi(z) = \overline{(z)_{i\in\omega}}$.

Soit les deux suites de rationnels : $(1)_{i\in\omega}$ et $(i - 10^{-i})_{i\in\omega}$

.1.4 Opérations et Relations

Les ensembles $\mathbb{R}^\omega$ et $\mathbb{C}^\omega$ peuvent être munis des opérations et relations usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (respectivement), par exemple :

- $(a_i)_{i\in\omega} + (b_i)_{i\in\omega} \overset{def}{=} (a_i + b_i)_{i\in\omega}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}\, \lambda \cdot (a_i)_{i\in\omega} \overset{def}{=} (\lambda \cdot a_i)_{i\in\omega})$ (vrai aussi pour $\lambda \in \mathbb{C}$)
- $(a_i)_{i\in\omega} \times (b_i)_{i\in\omega} \overset{def}{=} (a_i \times b_i)_{i\in\omega}$
- $(a_i)_{i\in\omega} \le (b_i)_{i\in\omega} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists n \in \omega\, \forall i \in \omega\, ((i > n) \Rightarrow (a_i \le b_i))$ Dans $\mathbb{R}_\omega$

Mais il reste à vérifier que ces opérations passent au quotient, autrement dit, pour l'addition, par exemple, il faut démontrer (ce qui se fait sans difficulté) :

$$(((a_i)_{i\in\omega} \sim (a'_i)_{i\in\omega}) \wedge ((b_i)_{i\in\omega} \sim (b'_i)_{i\in\omega})) \Rightarrow (((a_i)_{i\in\omega} + (b_i)_{i\in\omega}) \sim ((a'_i)_{i\in\omega} + (b'_i)_{i\in\omega}))$$

Pour la multiplication par un réel (notée $\cdot$), la démonstration du passage au quotient est très simple aussi.

Il est aisé de montrer que $(\mathbb{R}_\omega, +, \cdot)$ (resp. $(\mathbb{C}_\omega, +, \cdot)$) est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Pour montrer que la dimension est infinie, il suffit de démontrer, par exemple, que la famille $\big(\alpha_k = (i^k)_{i\in\omega}\big)_{k\in\omega}$ est une famille libre.

Malheureusement, pour la multiplication, cela ne marche pas :

$$\begin{array}{cccccc}
(0)_{i\in\omega} & \sim & \left(\dfrac{1}{i+1}\right)_{i\in\omega} & & \\
(0)_{i\in\omega} & \times & (i+1)_{i\in\omega} & = & (0)_{i\in\omega} \\
\left(\dfrac{1}{i+1}\right)_{i\in\omega} & \times & (i+1)_{i\in\omega} & = & (1)_{i\in\omega} \\
(0)_{i\in\omega} & \not\sim & (1)_{i\in\omega} & &
\end{array}$$

Pour les relations d'ordre sur $\mathbb{R}_\omega$ les définitions sont ($\le$ et $<$ ont leur sens usuel sur $\mathbb{R}$) :

$\forall\alpha \in \mathbb{R}_\omega\, \forall\beta \in \mathbb{R}_\omega\, ((\alpha \le \beta) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i\in\omega} \in \alpha\, \exists (b_i)_{i\in\omega} \in \beta\, \forall i \in \omega (a_i \le b_i))$

$\forall\alpha \in \mathbb{R}_\omega\, \forall\beta \in \mathbb{R}_\omega ((\alpha < \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \le \beta) \wedge (\alpha \ne \beta)))$

Nous noterons α, β, etc. les éléments de $\mathbb{R}_\omega$ et de $\mathbb{C}_\omega$, a, b, etc. des éléments de $\mathbb{R}^\omega$ et de $\mathbb{C}^\omega$, a_i, b_i, etc. des éléments de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ tels que (sauf mention du contraire) :

$$\begin{array}{ccccccc}
a & = & (a_i)_{i\in\omega} & \qquad & b & = & (b_i)_{i\in\omega} \\
\alpha & = & \overline{a} & & \beta & = & \overline{b}
\end{array}$$

Avec ces conventions (la notation $\overline{x}$ désigne la classe de x pour la relation $\sim$), on peut réécrire la définition de $\le$ plus simplement :

$\forall\alpha \in \mathbb{R}_\omega\, \forall\beta \in \mathbb{R}_\omega\, ((\alpha \le \beta) \Leftrightarrow \exists a\, \exists b\, \forall i \in \omega (a_i \le b_i))$ [1]

Avec cette définition, $\le$ (resp. $<$) est une relation d'ordre (resp. d'ordre strict) partielle. Nous donnons la démonstration pour la symétrie de $\le$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
\alpha \le \beta & \wedge & \beta \le \alpha \\
\exists a\, \exists b\, \forall i \in \omega\, (a_i \le b_i) & \wedge & \exists a'\, \exists b'\, \forall i \in \omega\, (b'_i \le a'_i) \\
\lim\limits_{i\to\infty} (b_i - a_i) \ge 0 & \wedge & \lim\limits_{i\to\infty} (b_i - a_i) \le 0 \\
\multicolumn{3}{c}{\lim\limits_{i\to\infty} (b_i - a_i) = \lim\limits_{i\to\infty} (b_i - b'_i) + \lim\limits_{i\to\infty} (b'_i - a'_i) + \lim\limits_{i\to\infty} (a'_i - a_i)} \\
a \sim a' \Leftrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} (a'_i - a_i) = 0 & \wedge & b \sim b' \Leftrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} (b'_i - b_i) = 0 \\
\lim_{i\to\infty} (b_i - a_i) = 0 & \wedge & \lim\limits_{i\to\infty} (b'_i - a'_i) = 0 \\
a \sim b & \Rightarrow & \alpha = \beta
\end{array}}$$

1. Il faut noter que la définition, apparemment naturelle de $<$: $((\alpha < \beta) \Leftrightarrow \exists a\, \exists b\, \forall i \in \omega (a_i < b_i))$, ne convient pas, car on pourrait, alors, montrer que $0 < 0$.

Ces relations d'ordre sont effectivement partielles, par exemple :

$$\neg\left(\overline{(0)_{i\in\omega}} \leq \overline{((-1)^i)_{i\in\omega}}\right) \wedge \neg\left(\overline{((-1)^i)_{i\in\omega}} \leq \overline{(0)_{i\in\omega}}\right)$$

A noter que la définition usuelle de $\leq$ est plutôt :

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}_\omega\, \forall\beta \in \mathbb{R}_\omega\, ((\alpha \leq \beta) \Leftrightarrow \exists(a_i)_{i\in\omega} \in \alpha\, \exists(b_i)_{i\in\omega} \in \beta\, \exists\eta \in \omega\, \forall i \in \omega((i > \eta) \Rightarrow (a_i \leq b_i)))$$

Il suffit de remplacer a par $(\min(a_i, b_i))_{i\in\omega}$, pour passer de la définition usuelle à la notre.

.1.5 Propriétés algébriques

Classification des hypernombres, les hypernombres appartiennent à une et une seule des catégories ci-dessous, les lignes commençant par $\circ$ sont des sous-catégories (exclusives les unes des autres) de la catégorie identifiée par $\bullet$, juste au-dessus :

- Hypernombres **Stables.**
- Hypernombres **Oscillants Bornés.**
- Hypernombres **Oscillants non Bornés.**
  - Hypernombres **Oscillants Majorés.**
  - Hypernombres **Oscillants Minorés.**
  - Hypernombres **Oscillants ni Majorés ni Minorés.**
- Hypernombres **Monotones Infinis.**
  - Hypernombres **Croissants Infinis.**
  - Hypernombres **Décroissants Infinis.**

Hypernombre α	Définition	Exemple
Stable	α peut être représenté par un réel : $\exists x \in \mathbb{R}\left(\overline{(x)_{i\in\omega}} = \alpha\right)$.	$\alpha = \overline{\left(1 - \frac{1}{i+1}\right)_{i\in\omega}}$
Fini ou Borné	Il existe une suite bornée a qui représente α (et donc elles le sont toutes).	$\alpha = \overline{((-1)^i)_i \in \omega}$
Oscillant	$\exists x \in \mathbb{R}^{+\star}\, \forall i \in \omega\, \exists j \in \omega\, \exists k \in \omega$ $((i < j < k) \wedge (a_j - a_k > x))$	$\alpha = \overline{((-1)^i + i)_{i\in\omega}}$
Oscillant Borné	α est oscillant et borné	$\alpha = \overline{((-1)^i)_{i\in\omega}}$
Oscillant Majoré	• α est oscillant • $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall i \in \omega\, (a_i < x)$	$\alpha = \overline{((\sin(i) - 1) \times e^i)_{i\in\omega}}$
Oscillant Minoré	• α est oscillant • $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall i \in \omega\, (a_i > x)$	$\alpha = \overline{((1 + (-1)^i) \times i)_{i\in\omega}}$
Oscillant ni Majoré ni Minoré	• α est oscillant • $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists i \in \omega\, (a_i > x)$ • $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists i \in \omega\, (a_i < x)$	$\alpha = \overline{((-1)^i \times i)_{i\in\omega}}$
Monotone infini	α est soit croissant infini, soit décroissant infini.	$\alpha = \overline{(2^i)_{i\in\omega}}$
Croissant infini	α peut être représenté par une suite $a = (a_i)_{i\in\omega}$ telle que : • $(\forall i \in \omega\, (a_{i+1} > a_i))$ • $(\forall x \in \mathbb{R}\, \exists i \in \omega\, (a_i > x))$	$\alpha = \overline{(i)_{i\in\omega}}$
Décroissant infini	α peut être représenté par une suite $a = (a_i)_{i\in\omega}$ telle que : • $(\forall i \in \omega\, (a_{i+1} < a_i))$ • $(\forall x \in \mathbb{R}\, \exists i \in \omega\, (a_i < x))$	$\alpha = \overline{(-5i)_{i\in\omega}}$

L'ensemble des hypernombres réels finis, noté $\mathcal{F}\mathbb{R}_\omega$ contient strictement $\mathbb{R}$ (l'image de $\mathbb{R}$ par le plongement naturel) et la multiplication y est bien définie :

$$\begin{array}{|rcl|}
\hline
\alpha \in \mathcal{F}\mathbb{R}_\omega & \wedge & \beta \in \mathcal{F}\mathbb{R}_\omega \\
(a \in \alpha) \wedge (a' \in \alpha) & \wedge & (b \in \beta) \wedge (b' \in \beta) \\
a \sim a' \Leftrightarrow \lim\limits_{i \to \infty} |a_i - a'_i| = 0 & \wedge & b \sim b' \Leftrightarrow \lim\limits_{i \to \infty} |b_i - b'_i| = 0 \\
a \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^{+*}\, \forall i \in \omega\, (|a_i| < x) & \wedge & b' \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^{+*}\, \forall i \in \omega\, (|b'_i| < x) \\
ab = (a_i b_i)_{i \in \omega} & \wedge & a'b' = (a'_i b'_i)_{i \in \omega} \\
\multicolumn{3}{|c|}{|a_i b_i - a'_i b'_i| = |a_i b_i - a_i b' i + a_i b' i - a'_i b' i| = |a_i(b_i - b'_i) + (a_i - a'_i) b'_i|} \\
\multicolumn{3}{|c|}{|a_i b_i - a'_i b'_i| \leq |a_i||b_i - b'_i| + |a_i - a'_i||b'_i| \leq x|b_i - b'_i| + y|a_i - a'_i|} \\
\lim\limits_{i \to \infty} |a_i b_i - a'_i b'_i| & = & 0 \\
ab \sim a'b' & \Leftrightarrow & \overline{ab} = \overline{a'b'} \\
\hline
\end{array}$$

Autrement dit $\overline{ab}$ ne dépend pas de a ni de b mais uniquement de $\overline{a}$ et de $\overline{b}$, ce qui légitime la définition :

$$\alpha \times \beta = \overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab}$$

$(\mathcal{F}\mathbb{R}_\omega, +, \times, \cdot)$ est donc une $\mathbb{R}$-algèbre, mais ce n'est pas un corps, puisque, par exemple, $\alpha = \overline{((1 + (-1)^i) \times i)_{i \in \omega}}$ n'a pas d'inverse (la suite qui définit α est $2, 0, 2, 0, \cdots$).

Un hypernombre réel α est dit « Séparé de 0 » si il peut être représenté par une suite a telle que :

$$\exists a \in \mathbb{R}^\omega \exists x \in \mathbb{R}^{+*}\, ((\alpha = \overline{a}) \wedge (a = (a_i)_{i \in \omega}) \wedge \forall i \in \omega (|a_i| > x))$$

$\mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega$ est l'ensemble des hypernombres réels bornés et séparés de 0 auxquels on adjoint $\{0\}$.

La multiplication est bien définie sur les éléments de $\mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega$ (ses éléments sont bornés) cette multiplication est même interne dans $\mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega$ (facile à démontrer).

Soit $\alpha \in \mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega$, donc $\exists a \in \mathbb{R}^\omega\, \exists x \in \mathbb{R}^{+*}\, \exists y \in \mathbb{R}^{+*}\, ((\alpha = \overline{a}) \wedge (a = (a_i)_{i \in \omega}) \wedge \forall i \in \omega (y > |a_i| > x))$ on pose $\alpha^{-1} = \overline{\left(\dfrac{1}{a_i}\right)_{i \in \omega}}$, cette définition est valide puisque $a_i \neq 0$ et même $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{a_i} > \dfrac{1}{y}$, ce qui montre que $\alpha^{-1} \in \mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega$, et, bien sûr, $\alpha \times \alpha^{-1} = 1$ [2].

Ce qui montre que $(\mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et $(\mathcal{SB}\mathbb{R}_\omega, +, \times)$ est un corps commutatif.

Toutes les suites de réels et donc toutes les séries de réels, ont une limite dans $\mathbb{R}_\omega$ (la classe de cette suite).

.1.6 Propriétés topologiques

Sur $\mathbb{C}^\omega$ (a fortiori sur $\mathbb{R}^\omega$), on peut définir la fonction $d : \mathbb{C}^\omega \times \mathbb{C}^\omega \longmapsto \mathbb{R}$ (ou $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \longmapsto \mathbb{R}$) par [3] :

$$d(a, b) = \frac{\limsup\limits_{i \in \omega} |a_i - b_i|}{1 + \limsup\limits_{i \in \omega} |a_i - b_i|}$$

Si $\limsup\limits_{i \in \omega} |a_i - b_i| = \infty$, on pose $d(a, b) = 1$.

La fonction d permet de munir $\mathbb{C}^\omega$ (et $\mathbb{R}^\omega$) d'une topologie dont une base d'ouverts est, pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$ $\mathcal{B}(a, r) = \{b \in \mathbb{C}^\omega \mid d(a, b) < r\}$ (ou $\mathcal{B}(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^\omega \mid d(a, b) < r\}$).

Il est clair que cette topologie n'est pas de Hausdorff (séparée), elle n'est même pas de Kolmogorov.

2. En notant $1 = \overline{(1)_{i \in \omega}}$.

3. La limite supérieure d'une suite est définie par : $\limsup\limits_{i \in \omega} u_i = \lim\limits_{i \in \omega} \left(\sup\limits_{\substack{j \in \omega \\ j \geq i}} u_j \right)$

Il est facile de vérifier que $((a \sim a') \wedge (b \sim b')) \Rightarrow \left(\limsup_{i \in \omega} |a_i - b_i| = \limsup_{i \in \omega} |a'_i - b'_i| \right)$, autrement dit, que $d(\alpha, \beta) = d\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = d(a, b)$ est bien définie.

d est une distance sur $\mathbb{C}_\omega$ (et sur $\mathbb{R}_\omega$) ; $(\mathbb{C}_\omega, d)$ et $(\mathbb{R}_\omega, d)$ sont des espaces métriques complets.

$(\mathbb{C}_\omega, d)$ (resp. $(\mathbb{R}_\omega, d)$) est le plus grand espace de Hausdorff qui soit un quotient de $(\mathbb{C}^\omega, d)$ (resp. $(\mathbb{R}^\omega, d)$) dans le sens où si X est un espace de Hausdorff quotient de $\mathbb{C}^\omega$ (resp. $\mathbb{R}^\omega$), p la projection $p : \mathbb{C}^\omega \longmapsto \mathbb{C}_\omega$ (resp. $p : \mathbb{R}^\omega \longmapsto \mathbb{R}_\omega$) et q la projection $q : \mathbb{C}^\omega \longmapsto X$ (resp. $q : \mathbb{R}^\omega \longmapsto X$), alors il existe une fonction continue $\nu : (\mathbb{C}^\omega \longmapsto X$ (resp. $\nu : (\mathbb{R}^\omega \longmapsto X$) telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^\omega \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C}_\omega \arrow[dl, dashed, "\nu"] \\
X &
\end{tikzcd}
\qquad \text{(resp.)} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\omega \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}_\omega \arrow[dl, dashed, "\nu"] \\
X &
\end{tikzcd}
$$

.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Extensions

On peut facilement généraliser la construction des hypenombres en considérant n'importe quel algèbre $\mathbb{A}$ sur laquelle on peut définir la notion de limite, et n'importe quel ordinal κ et considérer : $(\mathbb{A}^\kappa, +, \times, \cdot)$

- $(a_i)_{i \in \kappa} + (b_i)_{i \in \kappa} \quad \stackrel{def}{=} \quad (a_i + b_i)_{i \in \kappa}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \lambda \cdot (a_i)_{i \in \kappa} \quad \stackrel{def}{=} \quad (\lambda \cdot a_i)_{i \in \kappa})$
- $(a_i)_{i \in \kappa} \times (b_i)_{i \in \kappa} \quad \stackrel{def}{=} \quad (a_i \times b_i)_{i \in \kappa}$

Puis d'étudier l'ensemble $\mathbb{A}_\kappa = \mathbb{A}^\kappa / \sim$.

.1.8 Utilisation en physique

Une grande classe de problèmes physiques doivent gérer des quantités infinies dans leurs modèles, par exemple, un électron libre dont l'interaction avec un photon peut changer l'énergie de l'électron de telle sorte que celle-ci deviennent infinie.

La théorie des hypernombres et des extrafonctions permet de prendre en compte ces problèmes sans aucun compromis avec la rigueur mathématique.

.1.9 Références

1. M. Burgin, *Hypernumbers and Extrafunctions : Extending the Classical Calculus*, Springer, 168 pages, 2012.
2. M. Burgin, *Theory of Hypernumbers and Extrafunctions : Functional Spaces and Differentiation*,Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 7 N° 3, pages 201-212, 2002.
3. M. Burgin, *Hypermeasure in General Spaces*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 24 N° 3, pages 299-322, 2005.
4. M. Burgin & J.Ralston, *PDE and Extrafunctions*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, N° 34, Number 3, 2004.