I Algèbres de dimension 4 sur $\mathbb{R}$

I.1 Introduction

En dimension 2 il est aisé de déterminer toutes les $\mathbb{R}$-algèbres (cf. le chapitre sur les hypercomplexes), par contre en dimension 4, le nombre de possibilités est trop important pour en faire une liste exhaustive.

Par contre en imposant quelques contraintes, il est possible d'établir une liste intéressante [1].

Les éléments d'une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ peuvent s'écrire, en adaptant le cas général au cas de la dimension 4 : $z = a_0 + a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3$, mais pour ce cas particulier nous adopterons plutôt la notation $z = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$.

Rappelons qu'une telle algèbre est parfaitement définie par la table de multiplication des éléments d'une base (sachant que 1 est l'élément neutre de l'algèbre, seule la partie purement imaginaire de la base nécessite des calculs).

Les conditions que nous imposons sont les suivantes :

0) Par définition, nous choisirons $k = i \cdot j$ comme troisième élément de base.
1) $i^2 \in \{-1, 0, 1\}$
2) $j^2 \in \{-1, 0, 1\}$
3) Soit i, j et k commutent tous entre eux, soit ils anti-commutent tous (par exemple $i \cdot j = -i \cdot j$)
4) Soit i, j et k alternent [2] tous entre eux, soit ils anti-alternent tous (par exemple $i^2 \cdot j = -i \cdot (i \cdot j)$)

Ces conditions permettent de construire la table de multiplication partielle suivante :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	i^2	k	
j	j		j^2	
k	k			

Les cellules sur fond bleu doivent être calculées en fonction des choix faits pour les quatre conditions ci-dessus, les cellules sur fond pourpre se déduisent immédiatement des cellules bleues ou blanches en fonction uniquement de la condition 3.

Pour les calculs ci-dessous, nous poseront :

- $\alpha = 1$ si i, j et k alternent.
- $\alpha = -1$ si i, j et k anti-alternent.
- $\gamma = 1$ si i, j et k commutent.
- $\gamma = -1$ si i, j et k anti-commutent.

1. J'ai trouvé dans un forum une proposition à peu près similaire, mais fausse, ce qui m'a amené à creuser la question et à cette proposition.
2. cf. la définition de l'alternativité

$$
\begin{tikzcd}
 & i^2 j \arrow[dr] & \\
i \cdot k = i \cdot (i \cdot j) \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & i \cdot k = \alpha\, i^2 j \\
 & -i^2 j \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & j^2 i \arrow[ddr] & \\
 & j \cdot (j \cdot i) \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & \\
j \cdot k = j \cdot (i \cdot j) \arrow[ur, "\mathit{Commutent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-commutent}"'] & & -j^2 i \arrow[r] & j \cdot k = \alpha\gamma j^2 i \\
 & -j \cdot (j \cdot i) \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & \\
 & & j^2 i \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

Le calcul de k^2 est un peu plus compliqué, et en fait nous devons passer par le calcul de $(k^2)j$

$$
\begin{tikzcd}
 & (i \cdot j) \cdot [(i \cdot j) \cdot j] \arrow[r, "\mathit{Alternent}"] & (i \cdot j) \cdot (ij^2) \arrow[dr] & \\
(k^2)j = [(i \cdot j) \cdot (i \cdot j)] \cdot j \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & & (k^2)j = [(i \cdot j) \cdot i]\, j^2 \\
 & -(i \cdot j) \cdot [(i \cdot j) \cdot j] \arrow[r, "\mathit{Anti-alternent}"] & -(i \cdot j) \cdot (-ij^2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & i^2 j^2 j \arrow[ddr] & & \\
 & {[(j \cdot i) \cdot i]j^2} \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & & \\
(k^2)j = [(i \cdot j) \cdot i]\, j^2 \arrow[ur, "\mathit{Commutent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-commutent}"'] & & -(i^2 j^2) j \arrow[r] & (k^2)j = \alpha\gamma j^2 i^2 j \arrow[r, Rightarrow] & k^2 = \alpha\gamma j^2 i^2 \\
 & -[(j \cdot i) \cdot i]j^2 \arrow[ur, "\mathit{Alternent}"] \arrow[dr, "\mathit{Anti-alternent}"'] & & & \\
 & & i^2 j^2 j \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}
$$

Finalement nous pouvons compléter la table de multiplication :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	i^2	k	$\alpha\, i^2 j$
j	j	γk	j^2	$\alpha\gamma j^2 i$
k	k	$\alpha\gamma\, i^2 j$	$\alpha j^2 i$	$\alpha\gamma j^2 i^2$

Nous noterons $\mathbb{R}^4(i^2, j^2, \alpha, \gamma)$ les algèbres obtenues par cette méthode.

Il est très facile de programmer cette table de multiplication dans un tableur afin de générer toutes les tables possibles :

Soit (3 choix pour i^2)$\times$(3 choix pour j^2)$\times$(2 choix pour α)$\times$(2 choix pour γ) $=$ 36 tables.

On peut réduire un peu ce nombre en remarquant que i et j joue le même rôle et en imposant $i^2 \leq j^2$, ce qui laisse encore 24 possibilités, parmi lesquelles certaines sont isomorphes entre elles (cf. le tableau ci-dessous pour des exemples).

Quelques exemples :

i^2	j^2	α	γ	Nom
-1	1	1	-1	Coquaternion
1	1	1	-1	Coquaternion
-1	1	-1	-1	Quaternion hyperbolique fendus
-1	-1	-1	-1	Quaternion hyperbolique fendus
-1	0	1	-1	Dual complexe
-1	-1	1	1	Bicomplexe
-1	-1	1	-1	Quaternion
1	1	-1	-1	Quaternion hyperbolique
1	1	1	1	4-Complexe hyperbolique
-1	-1	1	1	4-Complexe circulaire

Les contraintes choisies dans ce chapitre ne permettent pas de mettre en évidence toutes les possibilités de $\mathbb{R}$-algèbres de dimension 4.

Par exemple :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	j	k	1
j	j	k	1	i
k	k	1	i	j

4-Complexe polaire

I.2 $\mathbb{R}$-Algèbres de dimension 4 célèbres

Citons les $\mathbb{R}$-algèbres de dimension qui aurons droit à un chapitre dédié :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Quaternions $= \mathbb{R}^4$(-1, -1, 1, -1)

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	-j
j	j	-k	1	i
k	k	j	-i	1

Quaternions Hyperboliques
$= \mathbb{R}^4$(1, 1, -1, -1)

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	1	-i
k	k	j	i	1

CoQuaternions = $\mathbb{R}^4$(-1, 1, 1, -1)

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	k	-1	-i
k	k	-j	-i	1

BiComplexes = $\mathbb{R}^4$(-1, -1, 1, 1)

·	1	i	ε	εi
1	1	i	ε	εi
i	i	-1	εi	-ε
ε	ε	εi	0	0
εi	εi	-ε	0	0

Complexes Duaux = $\mathbb{R}^4$(-1, 0, 1, 1)

I.3 $\mathbb{R}$-algèbres de dimension 4 rarement utilisées

I.3.1 Quaternions Twistés

L'ensemble des Quaternions Twistés est parfois aussi appelé « Quaternions Mutés ».

La table de multiplication est obtenu à partir des quaternions, en modifiant le signe des produit contenant k et un autre élément de base imaginaire.

Les Quaternions Twistés ne sont pas de la forme $\mathbb{R}^4(i^2, j^2, \alpha, \gamma)$, les éléments de base alternent partiellement : $(k^2j = -j) \wedge (k(kj) = ki = -j)$ or $(j^2k = -k) \wedge (j(jk) = j(-i) = k)$

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	-k	-1	-i
k	k	-j	i	-1

Quaternions Twistés

• Commutative	✗	La multiplication des éléments de base est anticommutative
• Associative	✗	Car non flexible
• Flexible	✗	$(i^2j = -j) \wedge (i(ij) = ik = j)$
• Diviseurs de 0	✓	$(1 - i) \cdot (j + k) = j + k - k - j = 0$
• Idempotent (non triviaux)	✗	
• Nilpotent	?	Pas d'éléments 2-nilpotent
• Conjugué $\overline{z}$	✓	$\overline{z} \overset{def}{=} x_0 - x_1 \cdot i - x_2 \cdot j - x_3 \cdot k$
• Norme	✓	$\|z\|^2 \overset{def}{=} z \cdot \overline{z} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ Non multiplicative
• Régulièrement Normée	✓	
• Inverse z^{-1}	✓	$(\|z\| \neq 0) \Rightarrow \left(z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{\|z\|^2}\right)$

I.3.2 Pseudo-Quaternions

On trouve aussi, mais rarement, mention des pseudo-quaternions, dont la définition n'est d'ailleurs pas stable, nous en citons juste un exemple ici (certains auteurs utilise Pseudo-Quaternions comme synonyme de CoQuaternions).

Les Pseudo-Quaternions ne sont pas de la forme $\mathbb{R}^4(i^2, j^2, \alpha, \gamma)$, les éléments de base alternent partiellement :
$(k^2j = j) \wedge (k(kj) = ki = j)$ or $(i^2j = -j) \wedge (i(ij) = ik = j)$

Un Pseudo-Quaternion $z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ peut aussi s'écrire :

$((x_0+x_2)+i(x_1+x_3))\dfrac{1+j}{2}+((x_0-x_2)+i(x_1-x_3))\dfrac{1-j}{2}$, en posant $\varepsilon_0=\dfrac{1+j}{2}$ et $\varepsilon_1=\dfrac{1-j}{2}$ on peut donc écrire $z=z_0\varepsilon_0+z_1\varepsilon_1$ avec $z_0\in\mathbb{C}$ et $z_1\in\mathbb{C}$ or $(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$ est une base idempotente, ce qui permet de démontrer facilement qu'il n'y a pas d'élément nilpotent dans les Pseudo-Quaternions, que l'on peut poser $\overline{z}=\overline{z_0}\varepsilon_0+\overline{z_1}\varepsilon_1$ et $|z|^2=|z_0|^2\cdot|z_1|^2$, cette pseudo-norme étant multiplicative, et on peut calculer un inverse (si $|z|^2\neq 0$) : $z^{-1}=\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}\varepsilon_0+\dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}\varepsilon_1$

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

Pseudo-Quaternions

- Commutative ✓
- Associative ✗ Car non flexible
- Flexible ✗ $(i^2j=-j)\wedge(i(ij)=ik=j)$
- Diviseurs de 0 ✓ $(1-j)(1+j)=1-j^2=0$
- Idempotent (non triviaux) ✓ $\left(\dfrac{1\pm j}{2}\right)^2=\dfrac{1\pm 2j+j^2}{4}=\dfrac{1\pm j}{2}$
- Nilpotent ✗ Facile à démontrer dans la base idempotente
- Conjugué $\overline{z}$ ✓ $\overline{z}\overset{def}{=}\overline{z_0}\varepsilon_0+\overline{z_1}\varepsilon_1$
- Norme ✓ $|z|^2\overset{def}{=}|z_0|^2\cdot|z_1|^2$
- Régulièrement Normée ✗
- Inverse z^{-1} ✗ $(|z|\neq 0)\Rightarrow\left(z^{-1}=\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}\varepsilon_0+\dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}\varepsilon_1\right)$

I.3.3 Quaternions Hyperboliques Fendus

Cet ensemble est assez naturel, puisqu'il est la version fendue des quaternions hyperboliques, d'où sa notation $\mathbb{M}$.

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	-j
j	j	-k	-1	-i
k	k	j	i	-1

Quaternions Hyperboliques Fendus
$=\mathbb{R}^4(1,-1,-1,-1)$

- Commutative ✗ La multiplication des éléments de base est anticommutative
- Associative ✗ Car non flexible
- Flexible ✗ $((k^2i)=-i)\wedge(k(ki)=kj=i)$
- Diviseurs de 0 ✓ $(1-i)(1+i)=1-i^2=0$
- Idempotent (non triviaux) ✓ $\left(\dfrac{1\pm i}{2}\right)^2=\dfrac{1\pm 2i+i^2}{4}=\dfrac{1\pm i}{2}$
- Nilpotent ✗
- Conjugué $\overline{z}$ ✓ $\overline{z}\overset{def}{=}x_0-x_1\cdot i-x_2\cdot j-x_3\cdot k$
- Norme ✓ $|z|^2\overset{def}{=}z\cdot\overline{z}=x_0^2-x_1^2+x_2^2+x_3^2$
- Régulièrement Normée ✗
- Inverse z^{-1} ✗ $(|z|\neq 0)\Rightarrow\left(z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\right)$

I.3.4 Nombres Hyper-Duaux

Les hyper-duaux (Jeffrey A. Fike and Juan J. Alonso) sont utilisés pour le calcul rapide des dérivées secondes. Ils peuvrnt être obtenu comme la dualification des nombres duaux, d'où la notation $\mathbb{D}_{\mathbb{D}_1}$.

$\cdot$	1	ε_1	ε_2	ε_3
1	1	ε_1	ε_2	ε_3
ε_1	ε_1	0	ε_3	0
ε_2	ε_2	ε_3	0	0
ε_3	ε_3	0	0	0

Nombres Hyper-Duaux
$= \mathbb{R}^4(0,0,1,1)$

- Commutative ✓
- Associative ✓
- Flexible ✓
- Diviseurs de 0 ✓ $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 = 0$
- Idempotent (non triviaux) ✗
- Nilpotent ✓ Les nilpotents sont de la forme $(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3)$
- 2-Nilpotent ✓ $(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3)$ avec $x_1x_2 = 0$
- 3-Nilpotent ✓ $(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3)$ avec $x_1x_2 \neq 0$
- Conjugué $\overline{z}$ ✗ Pas de « bonne définition ».
- Norme ✓ $|z| = |x_0|$, cette norme est multiplicative
- Régulièrement Normée ✗ cf. Conjugué
- Inverse z^{-1} ✓ $(|z| \neq 0) \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{x_0} + \frac{-x_1}{x_0^2}\varepsilon_1 + \frac{-x_2}{x_0^2}\varepsilon_2 + \left(\frac{-x_3}{x_0^2} + \frac{2x_1x_2}{x_0^3}\right)\varepsilon_3$

De la même façon que pour les Nombres Duaux on peut utiliser les nombres hyperduaux pour le calcul des dérivées, et même, ici, des dérivées secondes : soit f une fonction qui admet un développement en série de Taylor au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^n f^{(n)}(x)}{n!} = f(x) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)f'(x) + \varepsilon_3 f''(x).$$

I.4 Représentation Matricielle

La représentation matricielle d'une algèbre est un isomorphisme entre cette algèbre et une partie d'une algèbre de matrices de la forme $M_n(\mathbb{A})$, où $\mathbb{A}$ est une algèbre quelconque et n le plus petit possible ; si l'algèbre $\mathbb{A}$ est associative, alors $M_n(\mathbb{A})$ est aussi associative, ce qui explique que nous ne donnerons pas ici de présentation des algèbres non associatives (cette propriété permet, dans l'autre sens, de montrer qu'une algèbre est associative si elle admet une représentation matricielle à l'aide d'une algèbre associative).

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Quaternions $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CoQuaternions $\mathbb{H} = M_2(\mathbb{R})$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Bicomplexes $\mathbb{C}_2 \subset M_2(\mathbb{C})$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Complexes Duaux $\mathbb{D}_2 \subset M_2(\mathbb{C})$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hyper Duaux $\mathbb{D}_{\mathbb{D}_1} \subset M_2(\mathbb{D}_1)$

I.5 Tableau Récapitulatif

	Quaternions	Quaternions Hyperboliques	CoQuaternions	BiComplexes	Complexes Duaux	Quaternions Twistés	Pseudo-Quaternions	Quaternions Hyperboliques Fendus	HyperDuaux
Commutative	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓
Associative	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓
Flexible	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓
Diviseurs de 0	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Idempotent	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗
Nilpotent	✗	✗	✓	✓	✓	?	✗	✗	✓
Conjugué	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Normée	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Régulièrement Normée	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Inverse	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓