Table des matières

I Autres ensembles de nombres

Introduction

Certains ensembles de nombres qui existent bien dans la littérature mathématique ne seront pas traités ici, nous en donnons une définition rapide.

I.1 Périodes

La notion de Période a été proposée par Maxime Lvovitch Kontsevich (un mathématicien français, né en Russie (1964 -), il a reçu la médaille Fields en 1998) et Don Bernhard Zagier (un mathématicien américain (1951 -)).

L'ensemble des périodes est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ (on peut démontrer facilement que c'est une sous-algèbre de $\mathbb{C}$, sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ (la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$)), défini par :

Une Période est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont de la forme :

$$\int_\Sigma dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Où l'intégrale est absolument convergente, et Σ est une partie de $\mathbb{R}^n$ définie par des inéquations polynomiales à coefficients algébriques. L'ensemble des Périodes est donc dénombrables.

Une définition équivalente :

$$\int_\Sigma R(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Où l'intégrale est absolument convergente, et Σ est une partie de $\mathbb{R}^n$ définie par des inéquations polynomiales à coefficients rationnels et R une fraction rationnelle à coefficients rationnels. L'ensemble des Périodes est donc dénombrables.

Exemples :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Tous les Nombres algébriques} & : \quad \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & = & \displaystyle\int\limits_{\substack{x\geq 0 \\ x^2-x-1\leq 0}} dx \\
\text{Logarithmes de nombres rationnels} & : \quad \ln(n) & = & \displaystyle\int\limits_{1<x<n} x^{-1} dx \\
\text{Certains Nombres transcendants} & : \quad \pi & = & \displaystyle\int\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx dy
\end{array}$$

Savoir si e est ou n'est pas une période est une conjecture encore ouverte, il en est de même pour $\dfrac{1}{\pi}$.

L'inconvénient des Périodes, c'est qu'aucun nombre aujourd'hui n'est connu comme n'étant pas une Période.

L'utilité des Périodes, d'après Kontsevich et Zagier, est que pour démontrer qu'un nombre est transcendant, il vaut mieux commencer par montrer que ce n'est pas une période, même si ce n'est pas suffisant.