I Méthodes de construction

I.1 Multicomplexes $\mathbb{MC}_n$

I.1.1 Introduction

La dénomination Multicomplexe peut faire réference à deux types d'ensembles assez différents, ceux qui sont présentés ici et qui sont notés $\mathbb{MC}_n$ et les multicomplexes $\mathbb{C}_n$.

Les multicomplexes $\mathbb{MC}_n$ ont été étudiés récemment (1992 et sq), en particulier par N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg et R.Yamaleev, mais leur introduction remonte à Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1884).

I.1.2 Définition

Soit ε un élément tel que $\varepsilon^n = -1$ [1].

L'ensemble $\mathbb{MC}_n$ est l'ensemble des nombres de la forme $x = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \varepsilon^j$, où les a_j sont des réels.

$\mathbb{MC}_n$ est muni, naturellement d'une addition, d'une multiplication (distributive sur l'addition) et d'une multiplication par un nombre réel (qui n'est qu'un cas particulier de la multiplication)

Attention : pour $n > 2$, ε n'est pas une racine $n^{\text{ième}}$ complexe de -1, par contre pour $n = 2$ c'est bien le cas, d'ailleurs $\mathbb{MC}_2 = \mathbb{C}$.

I.1.3 Mode de construction

$\mathbb{MC}_n$ est un cas particulier d'algèbre de Clifford généralisée :

Une Algèbre de Clifford Généralisée a N générateurs notés de e_1 à e_N est une algèbre associative et unitaire, qui vérifie, pour tout j, k, l, m dans $[\![1; N]\!]$:

- $e_j e_k = \omega_{jk} e_k e_j$
- $\omega_{jk} e_l = e_l \omega_{jk}$
- $\omega_{jk}\omega_{lm} = \omega_{lm}\omega_{jk}$
- $e_i^{n_i} = 1$
- $\omega_{jk}^{n_j} = \omega_{jk}^{n_k} = 1$

Dans le cas des multicomplexes : $N = 1$, $n_1 = n$, $\omega_{jk} = 1$ et donc la multiplication est commutative dans $\mathbb{MC}_n$.

I.1.4 Tables de multiplication

La table de multiplication des nombres multicomplexes est très simple et surtout elle est unique pour un n donné.

Exemple $n = 5$

$\times$	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4
1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4
ε	ε	ε^2	ε^3	ε^4	-1
ε^2	ε^2	ε^3	ε^4	-1	-ε
ε^3	ε^3	ε^4	-1	-ε	-ε^2
ε^4	ε^4	-1	-ε	-ε^2	-ε^3

Exemple $n = 4$

$\times$	1	ε	ε^2	ε^3
1	1	ε	ε^2	ε^3
ε	ε	ε^2	ε^3	-1
ε^2	ε^2	ε^3	-1	-ε
ε^3	ε^3	-1	-ε	-ε^2

I.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Soit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(\varepsilon_0) & = & -\varepsilon_{n-1} \\ \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Big(\varphi(\varepsilon_j) & = & \varepsilon_{j-1} \Big) \end{array} \right.$

1. L'usage mis en place par N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg et R.Yamaleev est plutôt d'utiliser e pour le générateur, mais je trouve cet usage trop à même de faire confusion avec l'exponentielle, en particulier dans le domaine complexe, ces auteurs utilisent aussi facilement i comme variable de sommation, nous utiliserons plutôt j ou k pour les mêmes raisons.

On peut vérifier par récurrence que $\begin{cases} \bigwedge\limits_{j=0}^{k-1} \Big(\varphi^k(\varepsilon_j) & = & -\varepsilon_{n-(k-j)}\Big) \\ \bigwedge\limits_{j=k}^{n-1} \Big(\varphi^k(\varepsilon_j) & = & \varepsilon_{j-k}\Big) \end{cases}$

Et finalement on obtient : $\bigwedge\limits_{j=0}^{n-1} \Big(\varphi^n(\varepsilon_j) = -\varepsilon_{n-(n-j)} = -\varepsilon_j\Big)$, ce qui établit que $\varphi^n = -Id_n$

Soit E la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Si on pose E^k la matrice de φ^k, $E^k = \Big(\alpha_{j,j'}\Big)_{1\leq j\leq n}^{1\leq j'\leq n}$, les résultats précédents permettent de démontrer que :

$$\bigwedge_{1\leq j\leq n}^{1\leq j'\leq n} \Big(\alpha_{j,j'} = 0\Big) \text{ sauf } \begin{cases} \bigwedge\limits_{j=0}^{k-1} \Big(\alpha_{n+j-k+1,j+1} & = & -1\Big) \\ \bigwedge\limits_{j=k}^{n-1} \Big(\alpha_{j-k+1,j+1} & = & 1\Big) \end{cases}$$

On peut donc représenter les éléments de $\mathbb{MC}_n$ par un élément de $M_n(\mathbb{R})$:
Soit $\Phi : \mathbb{MC}_n \mapsto M_n(\mathbb{R})$ un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre engendré par $\Phi(\varepsilon) = E$, on a le résultat suivant :

$$\Phi\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \varepsilon^j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \Phi(\varepsilon^j) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot (\Phi(\varepsilon))^j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j E^j$$

Soit $x = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \varepsilon^j$, on peut donc lui associer la matrice $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Cette écriture sous forme d'une matrice permet de définir facilement une pseudo-norme ($|x| = 0$ n'entraîne pas $x = 0$) multiplicative sur $\mathbb{MC}_n$:
$|x|^n = |det(A)|$, c'est à dire que dans le cas $n = 2$ on retrouve bien le module des nombres complexes, mais pour $n = 3$ on trouve $|x|^3 = |a_0^3 - a_1^3 + a_2^3 + 3a_0a_1a_2|$ qui est nul, par exemple, pour $a_0 = a_1$ et $a_2 = 0$.

Les éléments de pseudo-norme nulle sont des diviseurs de 0, que nous identifierons exhaustivement ci-dessous, dans le paragraphe sur les propriétés algébriques.

On peut aussi définir un homomorphisme injectif $\Psi : \mathbb{MC}_n \mapsto M_n(\mathbb{C})$, en posant $q = e^{\frac{i\pi}{n}}$:

$$\Psi(\varepsilon) = \begin{pmatrix} q & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q^3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q^{2k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q^{2n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice représentant un nombre multicomplexe étant diagonale, cela simplifie beaucoup les calculs et permet de calculer assez facilement un conjugué (voir le cas marticulier de $\mathbb{MC}_3$).

I.1.6 Propriétés algébriques

$\mathbb{MC}_n$ est une algèbre commutative (par définition du générateur) et associative (ce qui est une conséquence immédiate de la représentation par des matrices de $M_n(\mathbb{R})$) de dimension n sur $\mathbb{R}$, générée (au sens d'une algèbre) par un seul élément : ε.

Il est facile de vérifier, avec la représentation matricielle, que tout élément de $\mathbb{MC}_n$ est soit inversible, soit un diviseur de 0.

$\mathbb{MC}_n$, pour $n > 2$ contient des diviseurs de 0, par exemple :

- ➟ $n \equiv 1\,[2]$: $(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots+(-1)^j\varepsilon^j+\cdots+\varepsilon^{n-1}) =$
  $(1+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n = 0$
- ➟ $n \equiv 2\,[4]$: $(1+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2+\varepsilon^4-\cdots+(-1)^j\varepsilon^{2j}+\cdots+\varepsilon^{n-2}) =$
  $(1+\varepsilon^2-\varepsilon^2-\varepsilon^4+\cdots+\varepsilon^{n-2}+\varepsilon^n = 0$
- ➟ $n \equiv 0\,[4]$: $\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1\right) =$
  $2\varepsilon^{\frac{n}{2}}-(\varepsilon^n+2\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1) = 0$

Les exemples précédents peuvent être généralisés ; dans les paragraphes qui suivent, nous allons classifier complètement la structure des diviseurs de zéro dans les algèbres $\mathbb{MC}_n$, pour $n > 2$, pour ce faire nous aurons besoin d'une définition : Soit $H \subset \mathbb{MC}_n$, alors l'orthogonal de H dans $\mathbb{MC}_n$, qui sera noté $H^\perp$ est défini par :

$$\forall x \in H\, \forall y \in H^\perp\, \forall z \in \mathbb{MC}_n((xy=0) \wedge ((zx=0) \Rightarrow (z \in H^\perp)))$$

$$\boxed{➟ \quad n \equiv 1\,[2]}$$

1. Le sous-espace vectoriel H_1 engendré par le nombre $\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j\right)$ est stable par la multiplication par ε :
   $\lambda\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j\right)\varepsilon = \lambda\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^{j+1} = -\lambda\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\varepsilon^{j+1} = \lambda\left(\varepsilon^n - \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j\right) = -\lambda\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j$
   Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_1 = \left\langle 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots+(-1)^j\varepsilon^j+\cdots+\varepsilon^{n-1}\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension 1.
2. Le sous espace vectoriel H_2 engendré par l'ensemble de nombres $\left(\varepsilon^j(1+\varepsilon)\right)_{0\le j<n-1}$ est stable par la multiplication par ε :
   $$\bigwedge_{j=0}^{n-3}\left((\varepsilon^j(1+\varepsilon))\varepsilon = \varepsilon^{j+1}(1+\varepsilon)\right) \qquad (\varepsilon^{n-2}(1+\varepsilon))\varepsilon = \varepsilon^{n-1}-1 = \sum_{j=0}^{n-2}\left((-1)^{j+1}\varepsilon^j(1+\varepsilon)\right)$$
   Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_2 = \left\langle\left(\varepsilon^i(1+\varepsilon)\right)_{0\le i<n-1}\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension $n-1$ (la famille est clairement libre, tous les nombres de la famille étant de degré en ε différents).
3. $\forall x \in H_1^\star\, \forall y \in H_2^\star$, le produit (xy) contient le facteur $\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j\right)(1+\varepsilon) = 1+\varepsilon^n = 0$, donc $H_1 \subset H_2^\perp$ et $H_2 \subset H_1^\perp$.
4. Soit $\lambda(1-\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1}) \in H_1 \cap H_2$, donc $\lambda(1-\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1})\cdot(1-\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1}) = 0$ or le terme réel de $\lambda(1-\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1})^2$ est égal à $\lambda\left(1^2+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j(-1)^{n-j}\varepsilon^{n-j}\right) = \lambda\left(1^2+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^n\varepsilon^n\right) = \lambda n$, pour que ce produit soit nul, il faut que $\lambda = 0$, ce qui démontre que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

5. $((\dim_{\mathbb{R}}(H_1)+\dim_{\mathbb{R}}(H_2)=1+(n-1)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{MC}_n))\wedge(H_1\cap H_2=\{0\}))\Rightarrow(\mathbb{MC}_n=H_1\oplus H_2)$

6. H_1 ne contient qu'un seul idempotent non trivial : $e_1=\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\varepsilon^j\right)$.

   Un idempotent X appartenant à H_2 vérifie $X(X-1)=0$, autrement dit $X-1\in H_1$, c'est à dire que $X=1+\lambda e_1$, or $(1+\lambda e_1)^2=1+2\lambda e_1+\lambda^2 e_1$ les deux solutions sont $\lambda=0$ (qui donne $X=1$) et $\lambda=-1$ (qui donne $X=1-e_1$).
   H_2 ne contient donc qu'un seul idempotent non trivial : $e_2=1-e_1$ qui peut aussi s'écrire :

$$e_2=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j(n-1-j)(1+\varepsilon)\varepsilon^j\right)$$

$$\boxed{➟\quad n\equiv 2\,[4]}$$

1. Le sous-espace vectoriel H_1 engendré par les nombres $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^j\varepsilon^{2j}$ et $\varepsilon\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^j\varepsilon^{2j}\right)$ est stable par la multiplication par ε :
   $\left(\lambda(1-\varepsilon^2+\cdots+(-1)^j\varepsilon^{2j}+\cdots+\varepsilon^{n-2})+\mu\varepsilon\left(1-\varepsilon^2+\cdots+(-1)^j\varepsilon^{2j}+\cdots+\varepsilon^{n-2}\right)\right)\varepsilon=$
   $\lambda\varepsilon(1-\varepsilon^2+\cdots+(-1)^j\varepsilon^{2j}+\cdots+\varepsilon^{n-2})+\mu(\varepsilon^2-\varepsilon^4+\cdots+(-1)^j\varepsilon^{2j+2}+\cdots-1)=$
   $\lambda\varepsilon(1-\varepsilon^2+\varepsilon^4\cdots+\varepsilon^{n-2})-\mu(1-\varepsilon^2+\varepsilon^4\cdots+\varepsilon^{n-2})$
   Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_1=\left\langle\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^j\varepsilon^{2j},\varepsilon\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^j\varepsilon^{2j}\right)\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension 2.
2. Le sous-espace vectoriel H_2 engendré par l'ensemble de nombres $\left(\varepsilon^j(1+\varepsilon^2)\right)_{0\leq j<n-1}$ est stable par la multiplication par ε :

$$\bigwedge_{j=0}^{n-4}\left(((1+\varepsilon^2)\varepsilon^j)\varepsilon=(1+\varepsilon^2)\varepsilon^{j+1}\right)$$

$$((1+\varepsilon^2)\varepsilon^{n-3})\varepsilon=\varepsilon^{n-2}+\varepsilon^n=\varepsilon^{n-2}-1=\sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}}(-1)^{j+1}(1+\varepsilon^2)\varepsilon^{2j}$$

   Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_2=\left\langle\left(\varepsilon^j(1+\varepsilon^2)\right)_{0\leq j<n-1}\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension $n-2$ (la famille est clairement libre, tous les nombres de la famille étant de degré en ε différents).
3. $\forall x\in H_1^\star\,\forall y\in H_2^\star$, le produit (xy) contient le facteur $\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^j\varepsilon^{2j}\right)(1+\varepsilon^2)=1+\varepsilon^n=0$, donc $H_1\subset H_2^\perp$ et $H_2\subset H_1^\perp$.
4. Posons $\mathcal{Z}=(1-\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1})$ et soit $\lambda\mathcal{Z}+\mu\varepsilon\mathcal{Z}\in H_1\cap H_2$ donc $(\lambda\mathcal{Z}+\mu\varepsilon\mathcal{Z})\cdot\mathcal{Z}=0$, or, la partie réelle de $(\lambda+\mu\varepsilon)\mathcal{Z}^2$ est λn et la partie de degré 1 en ε est μn, pour que les deux soient nuls, il faut $\lambda=\mu=0$, ce qui démontre que $H_1\cap H_2=\{0\}$.
5. $((\dim_{\mathbb{R}}(H_1)+\dim_{\mathbb{R}}(H_2)=2+(n-2)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{MC}_n))\wedge(H_1\cap H_2=\{0\}))\Rightarrow(\mathbb{MC}_n=H_1\oplus H_2)$
6. H_1 ne contient qu'un seul idempotent non trivial : $e_1=\dfrac{2}{n}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^j\varepsilon^{2j}\right)$.

   Un idempotent X appartenant à H_2 vérifie $X(X-1)=0$, autrement dit $X-1\in H_1$, c'est à dire que $X=1+\lambda e_1+\mu\varepsilon e_1$, or $(1+\lambda e_1+\mu\varepsilon e_1)^2=1+2\lambda e_1+\lambda^2e_1+\mu^2\varepsilon^2e_1+2\mu\varepsilon e_1+2\lambda\mu\varepsilon e_1$ la seule solution est $(\lambda=-1)\wedge(\mu=0)$ (qui donne $X=1-e_1$).
   H_2 ne contient donc qu'un seul idempotent non trivial : $e_2=1-e_1$ qui peut aussi s'écrire :

$$e_2 = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-2}(-1)^j\left(\frac{n}{2}-1-j\right)(1+\varepsilon^2)\varepsilon^{2j}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad n \equiv 0\,[4]}$$

1. Le sous-espace vectoriel H_1 engendré par les nombres $\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}$ est stable par la multiplication par ε :

$$\bigwedge_{j=0}^{\frac{n}{2}-2}\left(((\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)\varepsilon^j)\varepsilon = (\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)\varepsilon^{j+1}\right)$$

$$((\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)\varepsilon^{\frac{n}{2}-1})\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}-1+\varepsilon^{\frac{n}{2}}$$
$$\sqrt{2}(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)\varepsilon^{\frac{n}{4}}-(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1) = 2\varepsilon^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1 = \varepsilon^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}-1$$

Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_2 = \left\langle\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n}{2}$ (la famille est clairement libre, tous les nombres de la famille étant de degré en ε différents).

2. Le sous-espace vectoriel H_2 engendré par les nombres $\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}$ est stable par la multiplication par ε :

$$\bigwedge_{j=0}^{\frac{n}{2}-2}\left(((\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1)\varepsilon^j)\varepsilon = (\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1)\varepsilon^{j+1}\right)$$

$$((\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1)\varepsilon^{\frac{n}{2}-1})\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}+1-\varepsilon^{\frac{n}{2}}$$
$$-\sqrt{2}(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1)\varepsilon^{\frac{n}{4}}-(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1) = -2\varepsilon^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1 = -\varepsilon^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3n}{4}}+1$$

Il est donc stable par la multiplication par toutes les combinaisons linéaires des puissances de ε, c'est à dire par tous les éléments de $\mathbb{MC}_n$, autrement dit $H_2 = \left\langle\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}\right\rangle$ est une sous algèbre et un idéal de $\mathbb{MC}_n$, c'est, bien sûr, un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n}{2}$ (la famille est clairement libre, tous les nombres de la famille étant de degré en ε différents).

3. $\forall x \in H_1^\star\ \forall y \in H_2^\star$, le produit (xy) contient le facteur $(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1) = 2\varepsilon^{\frac{n}{2}}-(\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1)^2 = 2\varepsilon^{\frac{n}{2}}-(\varepsilon^n+2\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1) = 0$, donc $H_1 \subset H_2^\perp$ et $H_2 \subset H_1^\perp$.

4. Soit $z \in H_1 \cap H_2 = \{0\}$, alors $z = \displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_j\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^j$ et $z\cdot\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right) = 0$ c'est à dire $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_j\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)^2\varepsilon^j = 0$, ou encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_j 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^{\frac{n}{4}+j} = 0$, or la famille définie par $\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^{\frac{n}{4}+j}\right)_{0\leq j<\frac{n}{2}}$ est libre (les termes de plus haut degré en ε sont tous de degré différent) donc $\displaystyle\bigwedge_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}(\lambda_j = 0)$ et donc $z = 0$.

5. $\left((\dim_{\mathbb{R}}(H_1)+\dim_{\mathbb{R}}(H_2) = \dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{2} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{MC}_n)) \wedge (H_1 \cap H_2 = \{0\})\right) \Rightarrow (\mathbb{MC}_n = H_1 \oplus H_2)$

6. Le nombre $e_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}+\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{3n}{4}}\right)$ est un idempotent appartenant à H_1 et $e_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}-\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{3n}{4}}\right)$ est un idempotent appartenant à H_2, de plus la famille $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}+\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{3n}{4}}\right)\varepsilon^j\right)_{0\leq j<n-1}$ est libre

(tous les degré en ε sont différents), c'est donc une base de H_1 ; pour les mêmes raisons, la famille $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}-\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{3n}{4}}\right)\varepsilon^j\right)_{0\leq j<n-1}$ est libre, c'est donc une base de H_2.

Si X est un idempotent appartenant à H_1, alors $\exists\overline{a}\in\mathbb{R}^{\frac{n}{2}}\left(X=\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}a_0e_1\varepsilon^j\right)$, mais comme $X-1\in H_2$, alors $\exists\overline{\alpha}\in\mathbb{R}^{\frac{n}{2}}\left(X=1+\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_0e_2\varepsilon^j\right)$ en multipliant ces deux équations par e_1, on obtient : $X=e_1$ (puisque $e_1^2=e_1$ et $e_1e_2=0$) ce qui montre que e_1 est le seul idempotent non trivial dans H_1 et e_2 est le seul idempotent non trivial dans H_2.

$\boxed{\twoheadrightarrow\ \text{Résumé}}$

Pour tout $n>2$, l'algèbre multicomplexe $\mathbb{MC}_n$, contient 2 sous-espaces-vectoriels H_1 et H_2 tels que [2] :

$n\equiv 1\,[2]$	$H_1=\left\langle 1-\varepsilon+\varepsilon^2\cdots(-1)^k\varepsilon^k\cdots+\varepsilon^{n-1}\right\rangle$	$\dim(H_1)=1$
	$H_2=\left\langle((1+\varepsilon)\varepsilon^k)_{0\leq k<n-1}\right\rangle$	$\dim(H_2)=n-1$
$n\equiv 2\,[4]$	$H_1=\left\langle(1-\varepsilon^2\cdots(-1)^k\varepsilon^{2k}\cdots+\varepsilon^{n-2})\,;\,\varepsilon(1-\varepsilon^2\cdots(-1)^k\varepsilon^{2k}\cdots+\varepsilon^{n-2})\right\rangle$	$\dim(H_1)=2$
	$H_2=\left\langle((1+\varepsilon^2)\varepsilon^k)_{0\leq k<n-2}\right\rangle$	$\dim(H_2)=n-2$
$n\equiv 0\,[4]$	$H_1=\left\langle\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}+\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}\right\rangle$	$\dim(H_1)=\frac{n}{2}$
	$H_2=\left\langle\left(\left(\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{n}{4}}-\varepsilon^{\frac{n}{2}}-1\right)\varepsilon^k\right)_{0\leq k<\frac{n}{2}}\right\rangle$	$\dim(H_2)=\frac{n}{2}$

- H_1 et H_2 sont des sous-algèbres
- H_1 et H_2 sont des idéaux
- $H_1\oplus H_2=\mathbb{MC}_n$ (en tant qu'espaces vectoriels)
- $\forall x\in\mathbb{MC}_n\,\forall y\in\mathbb{MC}_n\ ((xy=0)\Rightarrow(x\in H_1\cup H_2))$ (conséquence immédiate de $\mathbb{MC}_n=H_1\oplus H_2$)
- $H_1\subset H_2^{\perp}$ et $H_2\subset H_1^{\perp}$
- $(H_1^{\perp}=H_2)\wedge(H_2^{\perp}=H_1)$ (conséquence des 2 précédents résultats)
- $\mathbb{MC}_n$ ne contient aucun élément nilpotent (conséquence des résultats précédents)
- H_1 et H_2 contiennent chacun un et un seul idempotent non trivial
- $\forall x\in H_i\forall y\in H_i^*\exists z\in\mathbb{MC}_n\,(x=yz)$ (pour $i\in\{1,2\}$)

Le dernier point se démontre comme suit : soit $a\in H_j^{\star}$ et $\varphi_a:\mathbb{MC}_n\mapsto\mathbb{MC}_n$ définie par $\varphi_a(x)=ax$, φ_a est évidemment une application linéaire, or $\ker(\varphi_a)=H_j^{\perp}$, et $\operatorname{im}(\varphi_a)\subseteq H_j$, le théorème du rang permet de conclure : $\operatorname{im}(\varphi_a)=H_j$, autrement dit, $\forall x\in H_j\,\forall y\in H_j^{\star}\,\exists z\in\mathbb{MC}_n(x=yz)$

I.1.7 Cas de $\mathbb{MC}_3$

Les éléments de $\mathbb{MC}_3$ peuvent s'écrire $x=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2$, où $\varepsilon^3=-1$. Les matrices associés sont :

$$Id_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\qquad E^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que $E^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-Id_3$

2. $\perp$ signifie l'orthogonal au sens de la multiplication (donc des diviseurs de zéro).

Les éléments de $\mathbb{MC}_3$ peuvent donc s'écrire sous forme matricielle , comme un élément de $M_3(\mathbb{R})$:

$$X = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_0 & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

.

En choisissant la représentation par des matrices complexes, et en posant $= q = e^{\frac{i\pi}{3}}$, les matrices associés sont :

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 \end{pmatrix} \qquad E'^2 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & -q \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que $E'^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id_3$

Les éléments de $\mathbb{MC}_3$ peuvent donc s'écrire sous forme matricielle, comme un élément de $M_3(\mathbb{C})$:

$$X = \begin{pmatrix} a + bq + cq^2 & 0 & 0 \\ 0 & a - b + c & 0 \\ 0 & 0 & a - bq^2 - cq \end{pmatrix}$$

.

Ce qui permet de calculer facilement la pseudo-norme de x : $|x|^3 = |det(X)| = |a_0^3 - a_1^3 + a_2^3 + 3a_0a_1a_2|$, on peut aussi définir un conjugué :

$$X \cdot \begin{pmatrix} (a-b+c)(a-bq^2-cq) & 0 & 0 \\ 0 & (a+bq+cq^2)(a-bq^2-cq) & 0 \\ 0 & 0 & (a+bq+cq^2)(a-b+c) \end{pmatrix} = \det(X) Id_3$$

Or

$$\begin{array}{lcl} (a-b+c)(a-bq^2-cq) & = & a^2 - ab + ac - abq^2 + b^2q^2 - bcq^2 - acq + bcq - c^2q \\ & = & a^2 + bc(q-q^2) - (c^2 + ab(q-q^2))q + (b^2 - ac(q-q^2))q^2 \\ & = & a^2 + bc + (-c^2 - ab)q + (b^2 - ac)q^2 \text{ car } q - q^2 = 1 \\ (a+bq+cq^2)(a-bq^2-cq) & = & a^2 - abq^2 - acq + abq + b^2 - bcq^2 + acq^2 + bcq + c^2 \\ & = & a^2 + bc(q-q^2) - (-c^2 - ab(q-q^2)) + b^2 - ac(q-q^2) \\ & = & a^2 + bc - (-c^2 - ab) + (b^2 - ac) \\ (a+bq+cq^2)(a-b+c) & = & a^2 - ab + ac + abq - b^2q + bcq + acq^2 - bcq^2 + c^2q^2 \\ & = & a^2 + bc(q-q^2) + (c^2 + ab(q-q^2)q^2 + (-b^2 + ac(q-q^2))q \\ & = & a^2 + bc - (-c^2 - ab)q^2 - (b^2 - ac)q \end{array}$$

Ce qui permet de calculer le conjugué de x : $\overline{x} = (a_0^2 + a_1a_2) - (a_2^2 + a_0a_1)\varepsilon + (a_1^2 - a_0a_2)\varepsilon^2$

Il est possible de factoriser la pseudo-norme de x : $|x|^3 = \dfrac{1}{4}(a_0 - a_1 + a_2)((a_0 - a_1 - 2a_2)^2 + 3(a_0 + a_1)^2)$, ce qui permet de déterminer tous les diviseurs de 0 de $\mathbb{MC}_3$:

- ➟ $(a_0 - a_1 - 2a_2) \wedge (a_0 + a_1) = 0$ Ce qui définit une droite que nous noterons H_1.
- ➟ $a_0 - a_1 + a_2 = 0$ Ce qui définit un plan que nous noterons H_2.

$\mathbb{MC}_3$ possède deux et seulement deux éléments idempotents non triviaux, qui sont des diviseurs de 0, comme tous les idempotents : $e_1 = \dfrac{1}{3}(1 - e + e^2)$ et $e_2 = \dfrac{1}{3}(2 + e - e^2)$ vérifiant $e_1 + e_2 = 1$.

On peut aussi noter :

- ➟ $e_1 \in H_1$.
- ➟ $e_2 \in H_2$.
- ➟ $(e_2, \varepsilon e_2)$ est une base de H_2.
- ➟ $\varepsilon^2 e_2 = \varepsilon e_2 - e_2$.

Ces résultats permettent de remplir la table de multiplication dans la base $(e_1, e_2, \varepsilon e_2)$:

$\cdot$	e_1	e_2	εe_2
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	εe_2
εe_2	0	εe_2	$\varepsilon e_2 - e_2$

Les résultats ci-dessus ne sont que des cas particuliers des cas généraux vus précédemment.

I.1.8 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les multicomplexes sont des cas particuliers des algèbres hypercomplexes.
Pour $n = 2$ on retrouve les nombres complexes,
Pour $n = 4$ on retrouve les bicomplexes.

Rappel de la table de multiplication des bicomplexes (en utilisant les notations habituelles i, j, ij à la place des e_i :

$\times$	1	i	j	ij
1	1	i	i	ij
i	i	-1	ij	-j
j	j	ij	-1	-i
ij	ij	-j	-i	1

Pour définir un isomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_2 \mapsto \mathbb{MC}_4$ ($\mathbb{C}_2 =$ les bicomplexes), il suffit de définir les images d'une base.

Par exemple :

$\varphi(1) = 1$ (pas le choix pour une $\mathbb{R}$-algèbre)
$\varphi(i) = \varepsilon^2$
$\varphi(j) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon^3 + \varepsilon)$
$\varphi(ij) = \varphi(i) \cdot \varphi(j) = \varepsilon^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon^3 + \varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon^3 - \varepsilon)$

Avec ces données il est facile de construire la table de multiplication des images et de vérifier que c'est la même que celle de $\mathbb{C}_2$.

Variations : on peut aussi définir des ensembles de nombres en posant $\varepsilon^n = 1$ (en place de $e^n = -1$) afin d'obtenir des nombres multicomplexes fendus ($\mathbb{M}\mathbb{C}\!\!\!\backslash_n$), ou encore $\varepsilon^n = 0$ afin d'obtenir des nombres multiduaux $\mathbb{MD}_n$.

Bien sûr ces trois types d'algèbres peuvent s'obtenir à partir de quotients de l'ensemble des polynômes réels :

$$\mathbb{MC}_n \simeq \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^n + 1)} \qquad \mathbb{M}\mathbb{C}\!\!\!\backslash_n \simeq \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^n - 1)} \qquad \mathbb{MD}_n \simeq \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^n)}$$

I.1.9 Résolution de l'équation du premier degré dans $\mathbb{MC}_3$

Soit à résoudre l'équation d'inconnue X où $a \in \mathbb{MC}_n \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{MC}_n$:

$$aX + b = 0 \qquad (1)$$

- Si $|a| \neq 0$, a est inversible, donc l'équation (1) admet une et une seule solution : $X = -ba^{-1}$.
- Si $|a| = 0$
  - Si $|b| \neq 0$, a est un diviseur de 0, donc il existe $a' \neq 0$ tel que $aa' = 0$, en multipliant les deux membres de (1) par a', on obtient : $a'aX + a'b = 0$, c'est à dire $a'b = 0$, ce qui est impossible puisque b n'est pas un diviseur de 0 ; l'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathbb{MC}_n$.
  - Si $|b| = 0$

* $\star$ Si $a \in H_1$ et $b \notin H_1$ en multipliant les deux membres par un élément α non nul de H_2, on obtient $\alpha b = 0$, ce qui est impossible.
* $\star$ Si $a \in H_2$ et $b \notin H_2$ en multipliant les deux membres par un élément α non nul de H_1, on obtient $\alpha b = 0$, ce qui est impossible.
* $\star$ Si $\bigvee_{j=1}^{2} \Big((a \in H_j) \wedge (b \in H_j) \Big)$ il existe $\alpha \in \mathbb{MC}_n$ tel que $b = a\alpha$, et l'équation peut se ré-écrire $a(X + \alpha) = 0$, donc $X = -\alpha$ est une solution particulière évidente, et l'ensemble des solutions est : $\{\alpha + \beta \,|\, \beta \in H_j^{\perp}\}$ [3].

Pour résumer :

Théorème : L'équation du premier degré $aX + b = 0$ peut avoir :

0 solutions dans $\mathbb{MC}_n$, si $\bigvee_{j=1}^{2} \Big((a \in H_j) \wedge (b \notin H_j) \Big)$.

ou 1 solution dans $\mathbb{MC}_n$, si $a \notin \Big(H_1 \cup H_2 \Big)$.

ou 1 ensemble de solution de même dimension que H_1 si $(a, b) \in H_2^2$.

ou 1 ensemble de solution de même dimension que H_2 si $(a, b) \in H_1^2$.

I.1.10 Utilisation en physique

Théorie Quantique des Champs, cf. ci-dessous.
Extension de la théorie des champs de sine-Gordon

I.1.11 Références

1. M. Rausch de Traubenberg, *Algèbres de Clifford - Supersymétrie et Symétries $\mathbb{Z}_n$ -Applications en Théorie des Champs*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1997.
2. N. Fleury, M. Rausch De Traubenberg, R. M. Yamaleev, *Commutative Extended Complex Numbers and Connected Trigonometry*, Journal of mathematical analysis and applications, Volume 180, N° 2, pages 431 - 457, 1993.
3. N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg, *Extended Complex Number Analysis and Conformal-like Transformations*, Journal of mathematical analysis and applications, Volume 191, N° 1, pages 118 - 136, 1995.
4. P. Baseilhac, *Hidden symmetries in quantum Field theories from extended complex numbers*, International Journal Of Modern Physics A, Volume 14, N° 26, pages 4201 - 4235, 1999.

3. Si X_0 et X_1 sont deux solutions de l'équation $aX + b = 0$, alors $a(X_0 - X_1) = 0$, c'est à dire que $(X_0 - X_1) \in a^{\perp}$.