Problème

Partie I

1-a) Prouver que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$ avec égalité ssi $x = 1$.

1-b) En déduire que : $\forall t > 0, \dfrac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t$.

• Soit un réel $\lambda > 0$ fixé. On note f, g, u, v les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^x,\ g(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{\lambda + x},\ u(x) = \ln(f(x)),\ v(x) = \ln(g(x)).$$

2-a) Prouver que u et f sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour étudier le signe de u', utiliser I-1-b.

2-b) Prouver de même que v et g sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

3-a) En utilisant I-1-b, prouver que : $\forall x > 0,\ f(x) < e^{\lambda} < g(x)$ (1).

3-b) En déduire que : $\forall x > 0,\ e^{\lambda}\left(1 + \dfrac{\lambda}{x}\right)^{-\lambda} < f(x) < e^{\lambda} < g(x) < e^{\lambda}\left(1 + \dfrac{\lambda}{x}\right)^{\lambda}$ (2).

3-c) En utilisant exclusivement (2), déterminer les limites de f et g en $+\infty$.

4) Une application.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

En utilisant les questions précédentes, montrer que ces deux suites sont strictement monotones et déterminer leurs limites.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ n réels > 0.

On appelle moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique de $x_1, \ldots, x_n$

les réels respectifs : $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ et $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$.

Le but de cette partie est de prouver l'inégalité MGA :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \text{ avec égalité ssi } x_1 = \cdots = x_n.$$

On note $A = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $G = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$. Il est clair que $A > 0$ et $G > 0$.

1-a) Justifier que $\ln\left(\dfrac{G}{A}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{x_k}{A}\right)$. En déduire que $G \leq A$. (Utiliser I.1.)

1-b) Démontrer avec soin que $G = A$ ssi $x_1 = \cdots = x_n$.

2) On note $H = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}}$. Démontrer que $H \leq G$ et étudier le cas d'égalité.

ab^n

3) Une application.

3-a) Soit a et b deux réels > 0 et distincts. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ab^n < \left(\dfrac{a + nb}{n+1}\right)^{n+1}$.

3-b) En utilisant ce résultat, retrouver que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones.

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1-a) Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \dfrac{1}{k}$.

1-b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < H_n$ puis que $H_n \leq 1 + \ln n$.

1-c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln n}$.

2-a) En utilisant II, prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{H_n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$.

2-b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!}$.

3-a) En utilisant II, prouver que, pour tout $n \geq 2$, $n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - 1\right) < H_n$ (3).

3-b) On a aussi, pour tout $n \geq 2$, $\ln(n+1) < H_n$ (4).

Comparer $n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ et $\ln(n+1)$. Que peut-on en déduire ?