MV2 - GCCD 2013/14

Evaluation no. 1

Un solide modélisé par un point matériel de masse $m > 0$ se trouve au repos à l'origine à l'instant $t = 0$ (Cf. Fig. 1). On souhaite l'emmener à la même situation - au repos – à une distance $\ell > 0$ de l'origine à l'instant $t = T$ (Cf. Fig. 1). Dans ce but on lui applique une impulsion correspondant à une force $u(t)$ pendant un temps $t_0 > 0$ (Cf. Fig. 2)

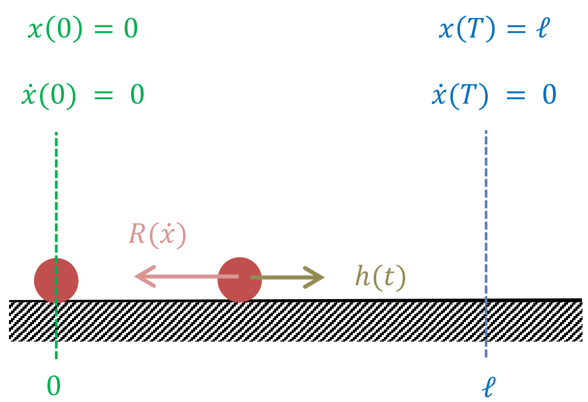

Fig. 1 – Le système

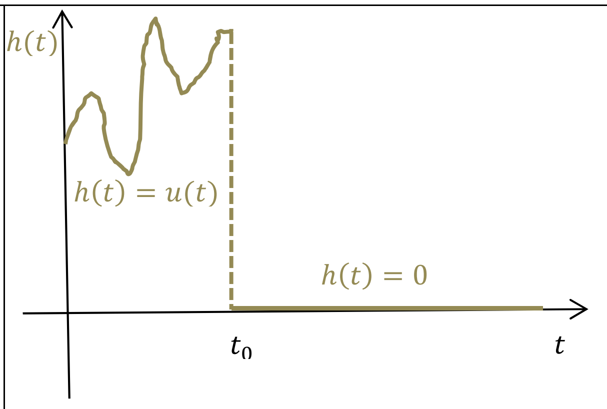

Fig. 2 – La force f(t)

Deux forces résistent au mouvement et retirent de l'énergie du système : le frottement contre l'obstacle et la résistance de l'air. Ainsi, la force qui s'oppose au mouvement est $R(\dot{x}) = -\varphi - \alpha\dot{x}^2$, où $\varphi = \mu\, m\, g\, sign(\dot{x})$ est le frottement contre l'obstacle et $\alpha\dot{x}^2$ est la résistance de l'air. On a $= C_x S \rho_{air}/2$, où C_x est un coefficient aérodynamique, S est la section droite dans le sens du mouvement et ρ_{air} est la masse volumique de l'air.

En posant $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t$, l'état du système est la solution de

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f_s}(t, \boldsymbol{x}, u), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0} = (0,0)^t ,$$

$$\boldsymbol{f_s} = \left(f_{s_1}, f_{s_2}\right)^t, f_{s_1}(t,x,u) = x_2, f_{s_2}(t,x,u) = h - \left(\mu\, g + \frac{\alpha}{m} x_2^2\right)$$

$$h = h\big(t_0, u(t)\big) = \frac{1}{2}\big(1 + sign(t_0 - t)\big)u(t) = \begin{cases} u(t), & si\ t < t_0 \\ 0, sinon & \end{cases}$$

Déterminer $u(t)$ en posant $(\theta > 0)$

$$u = \arg\min\{J_1\}, \qquad J_1 = \frac{1}{2}(x_1(T) - \ell)^2 + \frac{\theta}{2} x_2^2(t) = 0.$$

Votre rapport présentera les résultats pour plusieurs valeurs de m, T, θ et des commentaires. La présentation et le contenu seront notés.

Notes sur la résolution

Pour résoudre ce problème, il vous faut disposer de programmes pour :

1 – **une base hilbertienne** $\{\varphi_i : i \geq 0\}$: il s'agit, par exemple, de *polynomial_basis.m*, *p1_basis.m*, *trigonometrical_basis.m*.

2 – **la création d'un contrôle $\boldsymbol{u}$ à partir d'une base :** le sous-programme *create_control.m* crée une fonction $t \to u(t) = \sum_{i=1}^{nd} u_i \varphi_i(t)$à partir des coefficients $(u_1, \ldots, u_n)$.

3 – **la définition de $\boldsymbol{f_s}$:** le sous-programme *fstate1.m* calcule $\boldsymbol{f_s}(t, \boldsymbol{x}, u)$

4 - **la détermination de l'état $\boldsymbol{x}$ à partir du contrôle $\boldsymbol{u}$** : étant donnée une fonction u, l'utilisation des sous-programmes *state_system.m* détermine $\boldsymbol{x}$

Le programme test_state.m permet de tester les programmes 1 à 4

5 - **la détermination de $\boldsymbol{J_1}$ à partir de $\boldsymbol{x(T)}$** : le sous-programme *functional.m* détermine la valeur de

$$J = f_a\big(x(a), u(a)\big) + f_b\big(x(b), u(b)\big) + \int_a^b f\big(t, x(t), u(t)\big)dt$$

En appelant ce programme avec $f_a = 0$ (sous-programme *fa1.m*) et $f = 0$(sous-programme *f1.m*), on détermine $f_b\big(x(b), u(b)\big)$. Le sous-programme *fb1.m* contient la définition de f_b correspondant à la valeur de J_1 .

Le programme test_j1.m permet de tester les programmes 1 à 5

6 - **la détermination de $\boldsymbol{J_1}$ à partir du controle** : le sous-programme *first_order_control_functional.m* détermine la valeur de J_1 à partir du contrôle u.

Le programme test_first_order.m permet de tester les programmes 1 à 6

7 – **la détermination de $\boldsymbol{J_1}$ à partir d'une base :** le sous-programme *finite_dimensional_control_functional.m* détermine la valeur de J_1 pour valeur $u(t)$ pour t donné à partir des coefficients $(u_1, \ldots, u_n)$: il génère le contrôle $u(t) = \sum_{i=1}^{nd} u_i \varphi_i(t)$puis détermine J_1 à partir de ce contrôle u.

Le programme test_finite_dimensional.m permet de tester les programmes 1 à 7

8 – **un programme pour la minimisation d'une fonctionnelle en dimension finie :** par exemple, la fonction intrinsèque de MATLAB *fminsearch* ou la méthode du gradient à pas optimal (sous-programme *osd.m*)

Le programme test_min.m permet de tester les programmes 1 à 8

Voici un exemple de résultat:

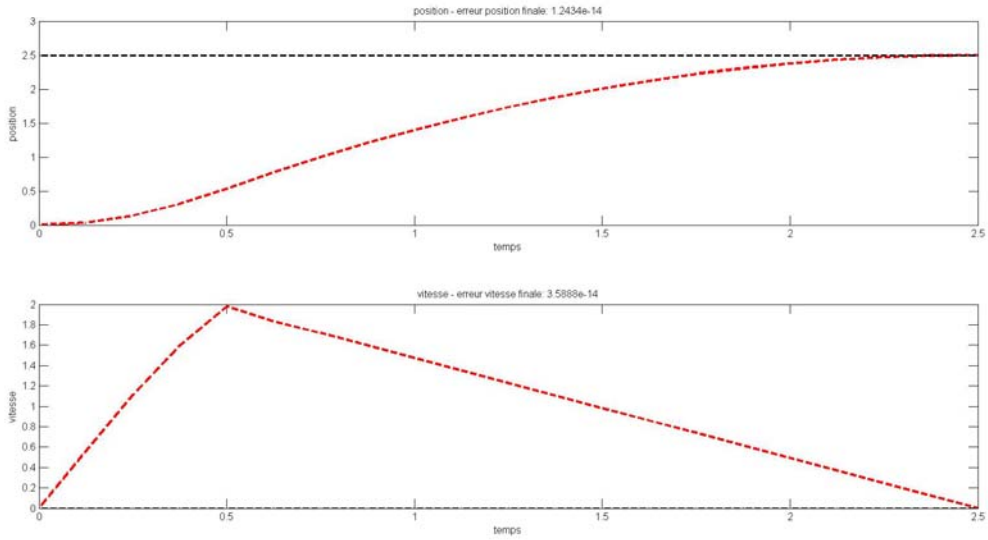

Figure 1 - Résultat fourni par fminsearch

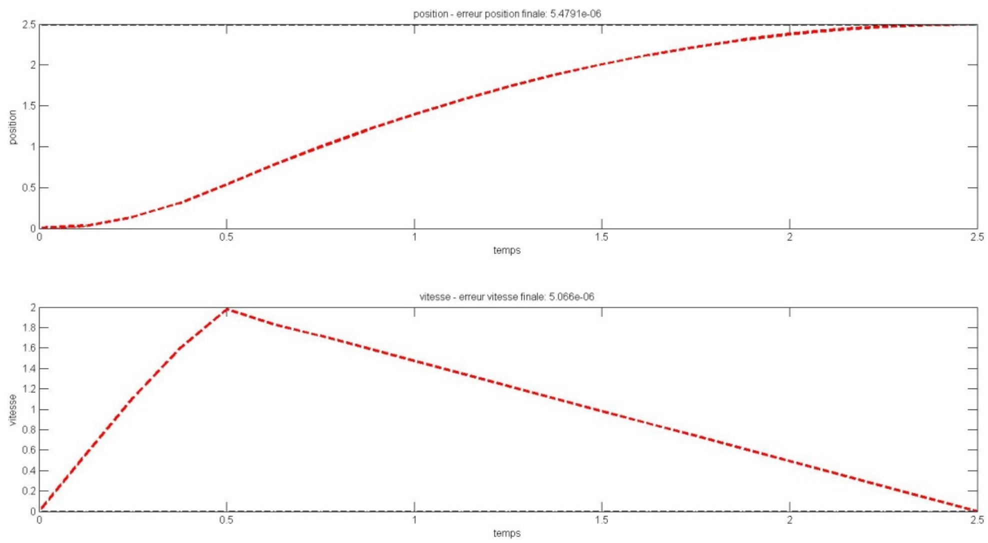

Figure 2 - Résultat fourni par gradient