

Si on pose $z := \ln x$ et $c := \ln b$, on a

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{dz}{z^p} = \int_1^\infty \frac{dz}{z^p}.$$

Cette intégrale converge donc si $p > 1$, elle diverge si $p \leq 1$.