Licence 2 - S3 - 13
Lw0002... PH

M31 (Algèbre linéaire et affine) DS1

10 novembre 2012 8h - 10h

Questions de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

a) Donner la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous-espace propre (associé à une valeur propre).

b) Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E et soit $v_1, \dots, v_n$ des éléments arbitraires de E. Donner la définition du déterminant $\det_{(e)}(v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ par rapport à la base $e_1, \dots, e_n$. Expliquer les notations que vous utilisez.

c) Soit $A : E \to E$ une application linéaire et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Quand dit-on que V est stable sous A ?

d) Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels et soit $A : E \to E$ une application linéaire. C'est quoi $P(A)$ et comment définit-on le ?

e) Soit $A : E \to E$ une application linéaire, soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel invariant sous A et soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que V est stable sous $P(A)$.

Exercice 1. Soit A, D et N les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'on a l'égalité $D \cdot N = N \cdot D$

On en déduit (mais ceci n'est pas demandé) qu'on a, pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'égalité $\exp(tA) = \exp(tD) \cdot \exp(tN)$.

b) Calculer pour tout $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\exp(tA)$.

c) En déduire, sans faire d'autres calculs, les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{pmatrix} w'(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w(t) \\ x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w(t) + 3y(t) \\ 2x(t) + 5z(t) \\ 2y(t) \\ 2z(t) \end{pmatrix}.$$

T.S.V.P.

Exercice 2.

a) Calculer le déterminant des trois matrices suivantes (en fonction des variables λ, a, b, c et d) :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b-\lambda \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c & d-\lambda \end{pmatrix} .$$

b) Soit $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$ le déterminant de la matrice de taille $n \times n$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) Calculer les valeurs propres (complexes) de A.
c) Calculer pour chaque valeur propre (complexe) une base pour le sous-espace propre associé.
d) Trouver une matrice inversible P (à coefficients complexes) telle que la matrice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ soit diagonale et déterminer cette matrice diagonale.

Barème indicatif : Questions de cours : 5,5 points ; exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5,5 points ; exercice 3 : 5 points.