

Etude qualitative des équations différentielles ordinaires autonomes du premier ordre

A. Un peu de théorie :

Une équation différentielle ordinaire (EDO, en abrégé) autonome du premier ordre, c'est une équation du

type $y' = F(y)$ où y est une fonction $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$ (I étant une partie de $\mathbb{R}$), y' est sa dérivée première

et F est une fonction $\begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y' = F(y) \end{cases}$ (J étant une partie de $\mathbb{R}$).

- Elle est ordinaire car f est une fonction d'une seule variable.
- Elle est autonome car F ne dépend pas explicitement de x .
- Elle est du premier ordre car elle n'implique que la dérivée première de y .

Deux exemples fondamentaux :

- Les EDO du type $a \cdot y' + b \cdot y + c = 0$ (où a , b et c sont des fonctions réelles de la variable x) sont des EDO autonomes du premier ordre. On doit savoir les résoudre (rapidement).
- Les EDO du type $y' = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ (où k et K sont des constantes) sont aussi des EDO autonomes du premier ordre. Elles sont utilisées dans des modèles relatifs à la croissance d'une population. On les appelle équations logistiques.

Remarquons que si F est une fonction affine alors on dit que c'est une EDO linéaire, sinon on dit que c'est une équation non linéaire.

Résoudre une EDO autonome du premier ordre, c'est chercher l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur I qui vérifient la relation $y' = F(y)$.

Comme pour le cas particulier des EDO linéaires du premier ordre, l'ensemble des solutions d'une EDO autonome du premier ordre est infini !

Problème de Cauchy :

On définit donc un problème de Cauchy comme étant la donnée d'une EDO et d'une condition (dite de

Cauchy) sur f notée $y(x_0) = y_0$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. On le note $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (pour les EDO autonome du premier ordre) :

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution (dite maximale) lorsque F est de classe C^1 .

Rappelons que si une fonction est de classe C^1 , alors elle est une fois dérivable et sa dérivée est continue.

Remarquons qu'une fonction est continue si elle est dérivable, donc un problème de Cauchy possède une unique solution si F est deux fois dérivable.

Reprenons nos deux exemples :

- Une EDO linéaire du premier ordre à coefficients constants (avec $a \neq 0$) muni d'une condition de Cauchy est un problème de Cauchy qui admet une et une seule solution. En effet, dans ce cas on a $F(y) = -\frac{b \cdot y + c}{a}$ qui est deux fois dérivable. Remarquons que si les coefficients sont non constants, alors ce problème de Cauchy n'est pas autonome !
- Une équation logistique avec une condition de Cauchy donnée est aussi un problème de Cauchy qui admet une solution unique. En effet, F est une fonction quadratique en y et donc elle est de classe C^1 .

Deux conséquences importantes :

- Si $F(y_0) = 0$ (autrement dit, y_0 est un zéro de F) et F est de classe C^1 , alors le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et le problème de Cauchy correspondant admet une unique solution constante $y(x) = y_0$.
- On sait que y et F sont dérivables, donc y' est aussi dérivable et on a $y'' = y' \cdot F'(y) = F(y) \cdot F'(y)$.

On peut donc procéder à une étude qualitative des solutions d'une EDO autonome du premier ordre !

Une étude qualitative d'un problème de Cauchy autonome du premier ordre c'est étudier qualitativement le comportement de sa solution. En clair, quand on se donne une EDO autonome du premier ordre, on souhaite connaître le sens de variation de la solution correspondante à une condition de Cauchy donnée. Cela se ramène donc toujours à une étude de la fonction F !

En général, on procèdera en trois étapes :

1. On cherche l'ensemble de définition et de dérivabilité de F .
2. On cherche les zéros de F , c'est-à-dire qu'on résout l'équation $F(y) = 0$. Les zéros de F sont appelés les points critiques de l'EDO. On a vu que pour un problème de Cauchy autonome du premier ordre, si y_0 est un point critique alors il admet une unique solution constante $y(x) = y_0$.
3. On étudie le sens de variation d'une solution y (quand elle n'est pas constante) via sa dérivée première $y' = F(y)$ et sa dérivée seconde $y'' = F(y) \cdot F'(y)$.

B. Etude de nos deux exemples fondamentaux :

1) EDO linéaire du premier ordre $a \cdot y' + b \cdot y + c = 0$ à coefficients constants et avec $a \neq 0$:

Remarquons que si a , b , et c sont non constants, alors le problème de Cauchy correspondant n'est pas autonome (x intervient explicitement dans F via les expressions de a , b , et c).

On a $F(y) = -\frac{by+c}{a}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

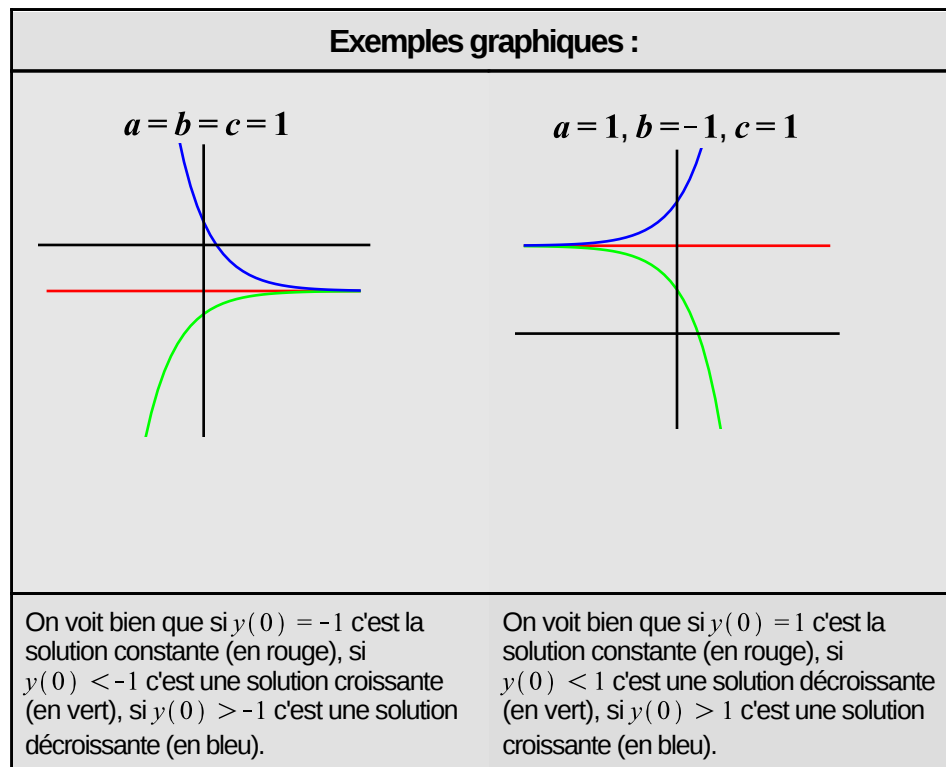
On a $F(y_0) = 0$ avec $y_0 = -\frac{c}{b}$.

On a $y'' = -\frac{b \cdot y + c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{b^2 \cdot y + b \cdot c}{a^2}$. Notons que dans ce cas, y'' n'est pas très utile, sauf pour justifier l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- En supposant a , b et c des réels strictement positifs, on a y croissante quand $y_0 < -\frac{c}{b}$ et y décroissante quand $y_0 > -\frac{c}{b}$.

- En supposant $a > 0$, $b < 0$ et $c > 0$, on a y décroissante quand $y_0 < -\frac{c}{b}$ et y croissante quand $y_0 > -\frac{c}{b}$.

Mais, quelque soit a , b et c , le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que la solution correspondant à $y(x_0) = y_0$ est unique.



Applications :

Les EDO linéaires du premier ordre sont très utiles pour modéliser un problème en physique, chimie et en ingénierie. On les trouve par exemple en :

- électricité : $L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = E(t)$ décrit l'évolution du courant dans un circuit RLC.
- mécanique : $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v - m \cdot g$ décrit l'évolution de la vitesse d'un objet en chute libre soumis à une force de frottement.
- chimie : certains problèmes de mélange sont décrits par ce type d'équation différentielle.
- ingénierie : $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ est la loi de refroidissement de Newton très utile pour les problèmes d'échange de chaleur. Elle est même utilisée en police scientifique pour déterminer l'heure de décès.

2) Les équation logistiques :

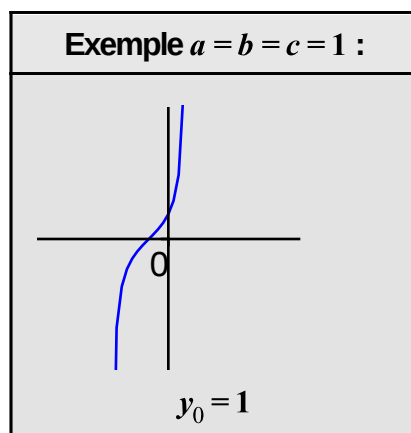
a) Pour commencer, étudions le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = ay^2 + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

F est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La solution d'un problème de Cauchy de ce type est donc unique.

Remarquons que l'EDO $y' = ay^2 + b$ admet deux points critiques $y_1 = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$ et $y_2 = \sqrt{-\frac{b}{a}}$ si $b \leq 0$, et qu'elle n'admet pas de point critique si $b > 0$.

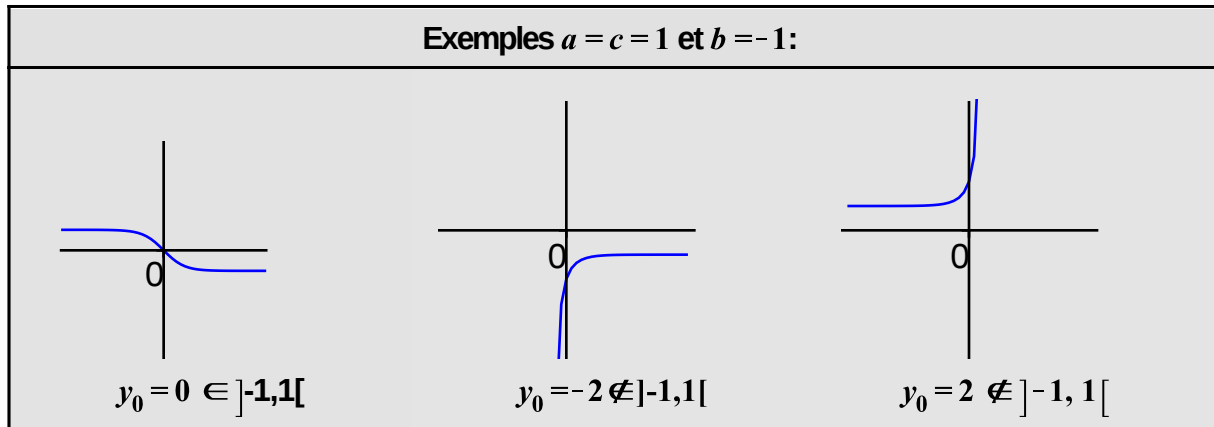
• **cas $b > 0$:**

F est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$ donc la solution y du problème de Cauchy est strictement croissante quelque soit y_0 .



• **cas $b < 0$:**

Comme $a > 0$, F est strictement négative quand $y_0 \in]y_1, y_2[$, et elle est strictement positive sinon. Ainsi, quand $y_0 \in]y_1, y_2[$, la solution au problème de Cauchy est strictement décroissante, et elle est strictement croissante sinon.



• **cas $b = 0$:**

Dans ce cas, on a $F(y) = a \cdot y^2$ et $y' = ay^2 + b$ n'admet qu'un seul point critique en $y_0 = 0$. F étant strictement positive, le problème de Cauchy correspondant admet une solution y strictement croissante.

b) Etudions maintenant le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \text{ avec } k \neq 0 \text{ et } K \neq 0.$$

On a $F(y) = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ qui est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le problème de Cauchy admet une unique solution.

Il est clair que F s'annule quand $y_1 = 0$ et quand $y_2 = K$.

Etudions le sens de variation de la solution en fonction de k , K et y_0 :

Comme F est un polynôme du second degré, on a les résultats suivants :

• **Si $k > 0$ et $K > 0$:**

On a $-\frac{k}{K} < 0$ donc :

F est strictement positive sur $]0, K[$ et strictement négative ailleurs. Ainsi, la solution au problème de Cauchy est strictement croissante si $y_0 \in]0, K[$ et elle est strictement décroissante sinon.

- Si $k < 0$ et $K < 0$:

Comme on a aussi $-\frac{k}{K} < 0$, on obtient les mêmes résultats que précédemment.

- Si $k < 0$ et $K > 0$:

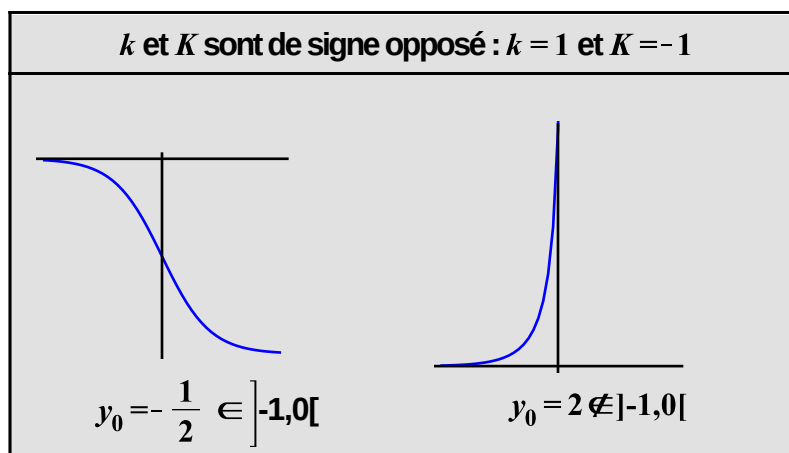
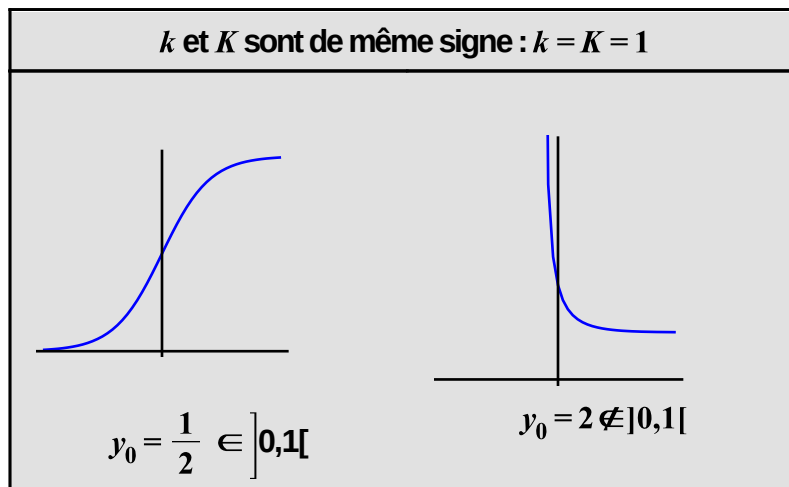
On a $-\frac{k}{K} > 0$ donc :

F est strictement négative sur $]0, K[$ et strictement positive ailleurs. Ainsi, la solution au problème de Cauchy est strictement décroissante si $y_0 \in]0, K[$ et elle est strictement croissante sinon.

- Si $k > 0$ et $K < 0$:

Comme on a aussi $-\frac{k}{K} > 0$, on obtient les mêmes résultats que précédemment.

Exemples graphiques :



Applications :

Si la variable x représente le temps (on la note alors t), l'équation logistique sert de modèle basique pour représenter la croissance d'une population. On peut étendre cette équation différentielle pour modéliser des comportements de population différents :

- $\frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$ a été utilisée pour modéliser des populations sujettes à des "prélèvements".

Par exemple, penser à une population de poissons dont certains sont pêchés à un rythme constant.

- $\frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{P}\right)$ est utilisée dans les modèles de croissance de population d'espèces

pouvant être menacées de disparition. En effet, le facteur supplémentaire $1 - \frac{m}{P}$ prend en compte les conséquences d'une population clairsemée.