Table des matières

.1 Octons $\widehat{\mathbb{O}}$

.1.1 Introduction

Les Octons ont été introduits par Victor L. Mironov et Sergey V. Mironov (fils de Victor), deux physiciens russes, en particulier dans leurs articles de 2009 (voir ci-dessous les références).

.1.2 Définition

Les Octons forment une algèbre de dimension 8 (d'où leur nom) sur $\mathbb{C}$, donc de dimension 16 sur $\mathbb{R}$ (d'où leur place ici), un Octon est un nombre hypercomplexe, qui peut s'écrire

$$\widehat{x} = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + y_0a_0 + y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3, \text{ où } x_i \in \mathbb{C} \text{ et } y_i \in \mathbb{C}.$$

Le choix des symboles pour éléments de base (la base est bien $\langle 1, e_1, e_2, e_3, a_0, a_1, a_2, a_3\rangle$) trouve sa justification dans une autre forme d'écriture :

$$\widehat{x} = x_0 + (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + y_0a_0 + (y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3) \text{ ou encore } \widehat{x} = x + \overleftrightarrow{x} + \widetilde{x} + \overrightarrow{x}$$

C'est à dire comme la somme d'un scalaire, noté x (un complexe ici), d'un pseudo-vecteur, noté $\overleftrightarrow{x}$, d'un pseudo-scalaire, noté $\widetilde{x}$ et d'un vecteur, noté $\overrightarrow{x}$.

Dans la suite de ce chapitre, i représente l'unité imaginaire des nombres complexes $((i \in \mathbb{C}) \wedge (i^2 = -1))$.

.1.3 Mode de construction

L'unité des scalaire sera noté e_0 ou 1. Les unités définissant le pseudo-vecteur seront notés $< e_1, e_2, e_3 >$, ces unités sont dites « axiales ». L'unité des pseudo-scalaires sera noté a_0. Les unités définissant le vecteur seront notés $< a_1, a_2, a_3 >$, ces unités sont dites « polaires ».

Les règles de calcul sont les suivantes :

La multiplication est associative
$e_0 = 1$ est l'élément neutre de la multiplication
i commute avec tous les octons (c'est un scalaire)

$$\bigwedge_{k=0}^{3} e_k^2 = 1 \qquad \bigwedge_{k=0}^{3} a_k^2 = 1 \qquad \bigwedge_{k=0}^{3} a_ke_k = e_ka_k = a_0$$

$$\bigwedge_{\substack{0<j\leq 3\\0<k\leq 3}}^{j\neq k} e_je_k = -e_ke_j \qquad \bigwedge_{\substack{0<j\leq 3\\0<k\leq 3}}^{j\neq k} a_ja_k = -a_ka_j \qquad \bigwedge_{\substack{0<i\leq 3\\0<j\leq 3}}^{j\neq k} a_je_k = -e_ka_j$$

$$a_1a_2 = ie_3 \qquad a_2a_3 = ie_1 \qquad a_3a_1 = ie_2$$
$$e_1e_2 = ie_3 \qquad e_2e_3 = ie_1 \qquad e_3e_1 = ie_2$$

Avec les formules précédentes, on peut calculer la table de multiplication complète, par exemple :

$$\bigwedge_{k=0}^{3} a_ke_k = a_0 \Rightarrow \bigwedge_{k=0}^{3} a_k^2e_k = a_ka_0 \Rightarrow \bigwedge_{k=0}^{3} a_ka_0 = e_k$$

$$\bigwedge_{k=0}^{3} a_ke_k = a_0 \Rightarrow \bigwedge_{k=0}^{3} a_ke_k^2 = a_0e_k \Rightarrow \bigwedge_{k=0}^{3} a_0e_k = a_k$$

$$(a_1a_2 = ie_3) \Rightarrow (a_1a_2^2 = ie_3a_2) \Rightarrow (a_1 = ie_3a_2) \Rightarrow (e_3a_2 = -ia_1)$$

.1.4 Table de multiplication

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	i	ie_1	ie_2	ie_3	a_0	a_1	a_2	a_3	ia_0	ia_1	ia_2	ia_3
1	1	e_1	e_2	e_3	i	ie_1	ie_2	ie_3	a_0	a_1	a_2	a_3	ia_0	ia_1	ia_2	ia_3
e_1	e_1	1	ie_3	$-ie_2$	ie_1	i	$-e_3$	e_2	a_1	a_0	ia_3	$-ia_2$	ia_1	ia_0	a_2	$-a_1$
e_2	e_2	$-ie_3$	1	ie_1	ie_2	e_3	i	$-e_1$	a_2	$-ia_3$	a_0	ia_1	ia_2	a_3	ia_0	$-a_1$
e_3	e_3	ie_2	$-ie_1$	1	ie_3	$-e_2$	e_1	i	a_3	ia_2	$-ia_1$	a_0	ia_3	$-a_2$	a_1	ia_0
i	i	ie_1	ie_2	ie_3	-1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	ia_0	ia_1	ia_2	ia_3	$-a_0$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$
ie_1	ie_1	i	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-ie_3$	ie_2	ia_1	ia_0	$-a_3$	a_2	$-a_1$	$-a_0$	ia_2	$-ia_1$
ie_2	ie_2	e_3	i	$-e_1$	$-e_2$	ie_3	-1	$-ie_1$	ia_2	a_3	ia_0	$-a_1$	$-a_2$	ia_3	$-a_0$	$-ia_1$
ie_3	ie_3	$-e_2$	e_1	i	$-e_3$	$-ie_2$	ie_1	-1	ia_3	$-a_2$	a_1	ia_0	$-a_3$	$-ia_2$	ia_1	$-a_0$
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	ia_0	ia_1	ia_2	ia_3	1	e_1	e_2	e_3	i	ie_1	ie_2	ie_3
a_1	a_1	a_0	ia_3	$-ia_2$	ia_1	ia_0	$-a_3$	a_2	e_1	1	ie_3	$-ie_2$	ie_1	i	$-e_3$	e_2
a_2	a_2	$-ia_3$	a_0	ia_1	ia_2	a_3	ia_0	$-a_1$	e_2	$-ie_3$	1	ie_1	ie_2	e_3	i	$-e_1$
a_3	a_3	ia_2	$-ia_1$	a_0	ia_3	$-a_2$	a_1	ia_0	e_3	ie_2	$-ie_1$	1	ie_3	$-e_2$	e_1	i
ia_0	ia_0	ia_1	ia_2	ia_3	$-a_0$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	i	ie_1	ie_2	ie_3	-1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
ia_1	ia_1	ia_0	$-a_3$	a_2	$-a_1$	$-a_0$	$-ia_3$	ia_2	ie_1	i	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-ie_3$	ie_2
ia_2	ia_2	a_3	ia_0	$-a_1$	$-a_2$	ia_3	$-a_0$	$-ia_1$	ie_2	e_3	i	$-e_1$	$-e_2$	ie_3	-1	$-ie_1$
ia_3	ia_3	$-a_2$	a_1	ia_0	$-a_3$	$-ia_2$	ia_1	$-a_0$	ie_3	$-e_2$	e_1	i	$-e_3$	$-ie_2$	ie_1	-1

Table de multiplication des Octons $\widehat{\mathbb{O}}$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.

On peut noter que le produit de deux éléments de base commute parfois et anticommute d'autres fois.

Mais on peut aussi présenter la table de multiplication des octons comme $\mathbb{C}$-algèbre :

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	a_0	a_1	a_2	a_3
1	1	e_1	e_2	e_3	a_0	a_1	a_2	a_3
e_1	e_1	1	ie_3	$-ie_2$	a_1	a_0	ia_3	$-ia2$
e_2	e_2	$-ie_3$	1	ie_1	a_2	$-ia_3$	a_0	ia_1
e_3	e_3	$ie2$	$-ie_1$	1	a_3	ia_2	$-ia_1$	a_0
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	1	e_1	e_2	e_3
a_1	a_1	a_0	ia_3	$-ia_2$	e_1	1	ie_3	$-ie_2$
a_2	a_2	$-ia_3$	a_0	ia_1	e_2	$-ie_3$	1	ie_1
a_3	a_3	ia_2	$-ia_1$	a_0	e_3	ie_2	$-ie_1$	1

Table de multiplication des Octons $\widehat{\mathbb{O}}$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbre.

L'algèbre des Octons a des liens étroits avec les Quaternions, par exemple la table de multiplication suivante

$\cdot$	1	$-ie_1$	$-ie_2$	$-ie_3$
1	1	$-ie_1$	$-ie_2$	$-ie_3$
$-ie_1$	$-ie_1$	-1	$-ie_3$	ie_2
$-ie_2$	$-ie_2$	ie_3	-1	$-ie_1$
$-ie_3$	$-ie_3$	$-ie_2$	ie_1	-1

Sous algèbre de $\widehat{\mathbb{O}}$

En posant $\mathsf{i} = -ie_1$, $\mathsf{j} = -ie_2$ et $\mathsf{k} = -ie3$, la table de multiplication précédente devient identique à celle des Quaternions.

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Quaternions $\mathbb{H}$

.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Avec les notations précédentes on peut remarquer que $\overleftrightarrow{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $\overrightarrow{x}^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, rappelons néanmoins que les scalaires sont des nombres complexes.

Une conjugaison intéressante dans les Octons est définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + y_0a_0 + y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 \\ \overline{\widehat{x}} &= x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 + y_0a_0 - y_1a_1 - y_2a_2 - y_3a_3 \end{aligned}$$

Et alors

$$\widehat{x} \cdot \overline{\widehat{x}} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 2a_0(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)$$

le produit $\widehat{x} \cdot \overline{\widehat{x}}$ appartient donc à une sous algèbre de la forme $\mathbb{C} + a_0\mathbb{C}$ isomorphe aux BiComplexes.

Une autre façon de présenter cette conjugaison : si $\widehat{x} = x + \overleftrightarrow{x} + \widetilde{x} + \overrightarrow{x}$, alors $\overline{\widehat{x}} = x - \overleftrightarrow{x} + \widetilde{x} - \overrightarrow{x}$.

.1.6 Propriétés algébriques

$(\widehat{\mathbb{O}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension 8, et donc une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 16. C'est en tant que $\mathbb{C}$-algèbre que les octons ont été utilisés par leurs promoteurs ; c'est une algèbre unitaire, associative et non commutative.
$(\widehat{\mathbb{O}}, +, \times, \cdot)$ contient (liste très partielle) :

$$\begin{array}{lll} \text{des diviseurs de 0} & : \displaystyle\bigwedge_{j=1}^{3} ((1+e_j)(1-e_j) = 0) & \displaystyle\bigwedge_{j=0}^{3} ((1+a_j)(1-a_j) = 0) \\ \text{des idempotents} & : \displaystyle\bigwedge_{j=1}^{3} \left(\left(\frac{1+e_j}{2}\right)^2 = \frac{1+e_j}{2} \right) & \displaystyle\bigwedge_{j=0}^{3} \left(\left(\frac{1+a_j}{2}\right)^2 = \frac{1+a_j}{2} \right) \\ \text{des nilpotents} & : \displaystyle\bigwedge_{\substack{0<j\leq 3 \\ 0<k\leq 3}}^{j\neq k} \left((e_j + ie_k)^2 = 0\right) & \displaystyle\bigwedge_{\substack{0<j\leq 3 \\ 0<k\leq 3}}^{j\neq k} \left((a_j + ia_k)^2 = 0\right) \end{array}$$

.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

L'algèbre des Octons est isomorphes à une sous-algèbre de $M_4(\mathbb{C})$, soit $\varphi : \widehat{\mathbb{O}} \mapsto M_4(\mathbb{C})$, définie par :

$$\varphi(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est à dire que les Octons sont isomorphes à l'ensembles des matrices complexes de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_0+y_3 & x_1-iy_2 & x_2+iy_1 & x_3+y_0 \\ x_1+iy_2 & x_0-y_3 & -ix_3+iy_0 & ix_2+y_1 \\ x_2-iy_1 & ix_3-iy_0 & x_0-y_3 & -ix_1+y_2 \\ x_3+y_0 & -ix_2+y_1 & ix_1+y_2 & x_0+y_3 \end{pmatrix}$$

Une autre façon de définir l'algèbre des Octons est donc : l'ensemble des matrices de $M_4(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & iX_2 & X_3 \\ iX_4 & X_5 & X_6 & iX_7 \\ X_7 & \text{-}X_6 & X_5 & X_4 \\ X_3 & X_2 & iX_1 & X_0 \end{pmatrix}$$

En plus des Octons, V. L. Mironov & S. V. Mironov ont développé les Sédéons, notés $\widehat{\mathbb{S}}$, une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension 16 (donc de dimension 32 en tant que $\mathbb{R}$-algèbre), dont nous ne donnerons que les définitions et les références (ci-dessous).

La multiplication est associative
$e_0 = a_0 = 1$ est l'élément neutre de la multiplication
Les éléments $(a_j)_{0\leq j\leq 3}$ sont appelés « *Absolus* ».
Les éléments $(e_j)_{0\leq j\leq 3}$ sont appelés « *Espace-Temps* ».
i commute avec tous les sédéons (c'est un scalaire)
$\left\langle a_j e_k \right\rangle_{0\leq j\leq 3}^{0\leq k\leq 3}$ est une base de $\widehat{\mathbb{S}}$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbre (elle contient bien 16 éléments).

$\bigwedge_{k=0}^{3} e_k^2 = 1 \qquad \bigwedge_{k=0}^{3} a_k^2 = 1$

$\bigwedge_{\substack{0<j\leq 3\\0<k\leq 3}}^{j\neq k} e_j e_k = -e_k e_j \qquad \bigwedge_{\substack{0<j\leq 3\\0<k\leq 3}}^{j\neq k} a_j a_k = -a_k a_j \qquad \bigwedge_{\substack{0\leq j\leq 3\\0\leq k\leq 3}} a_j e_k = e_k a_j$

$a_1a_2 = ia_3 \qquad a_2a_3 = ia_1 \qquad a_3a_1 = ia_2$
$e_1e_2 = ie_3 \qquad e_2e_3 = ie_1 \qquad e_3e_1 = ie_2$

$\cdot$	1	a_1	a_2	a_3
1	1	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	1	ie_3	-ia_2
a_2	a_2	-ia_3	1	ia_1
a_3	a_3	ia_2	-ia_1	1

Multiplication des Absolus de $\widehat{\mathbb{S}}$

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	1	ie_3	-ie_2
e_2	e_2	-ie_3	1	ie_1
e_3	e_3	ie_2	-ie_1	1

Multiplication des Espace-Temps de $\widehat{\mathbb{S}}$

Un sédéon peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= e_0(x_{00}a_0 + x_{01}a_1 + x_{02}a_2 + x_{03}a_3) \\ &+ e_1(x_{10}a_0 + x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + x_{13}a_3) \\ &+ e_2(x_{20}a_0 + x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + x_{23}a_3) \\ &+ e_3(x_{30}a_0 + x_{31}a_1 + x_{32}a_2 + x_{33}a_3) \end{aligned}$$

Ou, plus simplement :

$$\widehat{x} = \underbrace{x+\vec{x}}_{\text{Absolu}} + \underbrace{x_t+\vec{x}_t}_{\text{Temps}} + \underbrace{x_e+\vec{x}_e}_{\text{Espace}} + \underbrace{x_{et}+\vec{x}_{et}}_{\text{Espace-Temps}}$$

Bien sûr, le vocabulaire ci-dessus est « *Physicien* » et provient directement des travaux des créateurs.

.1.8 Utilisation en physique

Les Octons (ainsi que les Sédéons) ont été mis en place par deux physiciens russes dans le but de décrire les champs électromagnétiques, ils ont aussi été utilisés, par ces mêmes physiciens, et d'autres, pour la Mécanique Quantique ainsi que les équations de champs Gravito-Electromagnétique (Maxwell-Proca).

D'ailleurs les seules références disponibles sur le net sont des articles *Physiques* et non *Mathématiques*.

Grace aux octons, il est possible de formuler les équations de Maxwell-Proca et l'équation de Klein-Gordon de façon à la fois compacte et élégante. [1]

.1.9 Références

- Octons
  1. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics*, Journal of Mathematical Physics Volume, 50 N° 1, 2009.
  2. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Octonic representation of electromagnetic field equations*, Journal of Mathematical Physics Volume, 50 N° 1, 2009.
  3. S. Demir, M. Tanışlı & T. Tolan, *Octonic gravitational field equations*, International Journal of Modern Physics A, Volume 28, N° 21, 2013.
  4. S. Demir, M. Tanışlı & T. Tolan, *Octonic Form of Proca-Maxwell's Equations and Relativistic Derivation of Electromagnetism*, International Journal of Theoretical Physics, Volume 52, N° 12, pages 4488 - 4506, 2013.
- Sédéons
  1. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Space-time sedeons and their application in relativistic quantum mechanics and field theory* , Institute for physics of microstructures RAS, Nizhny Novgorod, Russie, 2014.
  2. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Noncommutative sedeons and their application in field theory* , 2011.
  3. V. L. Mironov, S. V. Mironov & S. A. Korolev, *Sedeonic theory of massless fields* , 2012.
  4. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Sedeonic theory of massive fields* , 2013.
  5. V. L. Mironov & S. V. Mironov, *Reformulation of relativistic quantum mechanics equations with non-commutative sedeons* , Journal of Applied Mathematics, N° 4, pages 53-60, 2013.
  6. V. L. Mironov & S. V. Mironov , *Sedeonic equations of gravitoelectromagnetism* , Journal of Modern Physics, N° 5, pages 917-927, 2014.

1. Extrait de la revue de l'article ≪ *Octonic Form of Proca-Maxwell's Equations and Relativistic Derivation of Electromagnetism* ≫ à voir dans les références.