Bonjour, je vais vous exposer mon exercice, pouvez vous vérifier si ce que j'ai fait est juste et m'aider pour les 3 dernières questions ?
Merci d'avance

On note E l'ensemble des fonctions polynomiales réels de degré au plus deux, autrement dit
$E = \{p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \longmapsto ax^2 + bx + c : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\ \}$

On considère l'application $\varphi : E \longrightarrow E \quad p \longmapsto p + p' + p''$ (où p' et p" désignent les dérivées premières et seconde de p)

1. On pose A =
1 1 2
0 1 2
0 0 1

a) montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}
Je trouve A^{-1} =
1 -1 0
0 1 -2
0 0 1

b) A l'aide de la formule du binome, déterminer les puissances de A
Après calcul j'ai obtenu :
A^n =
1 n n(n+1)
0 1 2n
0 0 1

2. a) Justifier que φ est bien une application
φ est définie par les dérivées premières et secondes. Chaque fonction en possède une donc c'est une application

b) Soit p1 : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ x \longmapsto (x+1)^2$ et p2 : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ x \longmapsto -2x+1$ deux éléments de E. Calculer φ(p1) et φ(p2)
φ(p1) = $x^2 + 4x + 5$
φ(p2) = $-2x - 1$

c) Soit p : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ x \longmapsto ax^2+bx+c$ un élément de E. Exprimer $\varphi o \varphi$(p) et $\varphi o \varphi o \varphi$(p) en fonction de p p' et p"
Je ne sais pas comment faire

3. a) Soit q : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un élément de E. On note Y la matrice colonne $\alpha\ \beta\ \gamma$ des coefficients de q. Montrer que l'équation φ(p) = q d'inconnue p (cité plus haut) élement de E s'écrit matriciellement sous la forme Y = MX ou X la matrice colonne a b c et M une matrice à préciser. Utiliser alors 1/a pour résoudre cette équation sans calculs

J'ai réussi à trouver α = a b = $-2\alpha+\beta$ et c = $\gamma-\beta$ mais je ne sais pas quoi en faire...

b) En déduire que φ est bijective donner φ^{-1} en exprimant pour tout q$\in$E, les coefficients de φ^{-1}(q) en fonction de ceux de q

Ici non plus je ne sais pas...