

PROJECTIONS ET SYMÉTRIES VECTORIELLES

Projections vectorielles

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : autrement dit, $E = F \oplus G$.

Par définition, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E , il existe un unique vecteur $\vec{x}_F$ dans F et un unique vecteur $\vec{x}_G$ dans G tels que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, ce qui peut s'écrire : $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{x}_F \in F, \exists ! \vec{x}_G \in G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$.

On définit l'application p suivante : $p : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ \vec{x} & \longmapsto p(\vec{x}) := \vec{x}_F \end{cases}$.

On dit que p est la **projection vectorielle** sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace G , ou encore **projecteur** de **base** F et de **direction** G (voir dessin en dernière page).

De même, on peut définir l'application $q : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ \vec{x} & \longmapsto q(\vec{x}) := \vec{x}_G \end{cases}$.

q est la **projection vectorielle** sur le sous-espace G parallèlement au sous-espace F , ou encore **projecteur** de **base** G et de **direction** F .

On dit que p et q sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$: par construction, on a, pour tout $\vec{x} \in E$, $p(\vec{x}) + q(\vec{x}) = \vec{x}$. Autrement dit, on a l'égalité des applications $p + q = \text{Id}_E$.

Linéarité des projections vectorielles

Proposition : une projection vectorielle est une application linéaire.

Par conséquent, c'est un endomorphisme de E : $p \in \mathcal{L}(E)$.

Preuve : Soit $E = F \oplus G$, et p le projecteur de base F , direction G .

Rappel : par construction, pour tout $\vec{z} \in E$, si on a $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} \in F$ et $\vec{b} \in G$, alors : $\vec{a} = p(\vec{z})$. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$: il existe $\vec{x}_F, \vec{y}_F$ dans F et $\vec{x}_G, \vec{y}_G$ dans G (uniques) tels que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ et $\vec{y} = \vec{y}_F + \vec{y}_G$. Par définition, $p(\vec{x}) = \vec{x}_F$ et $p(\vec{y}) = \vec{y}_F$.

Or, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda(\vec{x}_F + \vec{x}_G) + \mu(\vec{y}_F + \vec{y}_G) = (\lambda\vec{x}_F + \mu\vec{y}_F) + (\lambda\vec{x}_G + \mu\vec{y}_G)$.

F et G étant des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire, par conséquent $(\lambda\vec{x}_F + \mu\vec{y}_F) \in F$ et $(\lambda\vec{x}_G + \mu\vec{y}_G) \in G$. On en déduit, d'après le *rappel*, $p(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\vec{x}_F + \mu\vec{y}_F$, i.e $p(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda p(\vec{x}) + \mu p(\vec{y})$: l'application p est donc bien linéaire, c'est un endomorphisme de E et on a donc $p \in \mathcal{L}(E)$.

Conséquence :

p et Id_E étant des éléments du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, on en déduit $q = \text{Id}_E - p \in \mathcal{L}(E)$.

Propriétés élémentaires des projections vectorielles

Proposition : si $E = F \oplus G$, si p est le projecteur de base F , direction G , si q est le projecteur associé à p alors :

1. $p \circ p = p$, i.e $p^2 = p$. De même, $q \circ q = q$.
2. **Caractérisation d'appartenance à l'image d'un projecteur** : pour tout $\vec{x} \in E$,
 $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{x})$
3. $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = G$.
4. $\text{Im}(q) = G$ et $\text{Ker}(q) = F$.
5. $p \circ q = q \circ p = 0$ (ici, $0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, endomorphisme nul dans E).

Preuves :

1. Pour tout $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G \in E$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}_F \in F$: par conséquent, on peut écrire $\mathbf{p}(\vec{x}) = p(\vec{x}) + \vec{0}$, en remarquant $p(\vec{x}) \in F$ et $\vec{0} \in G$, et en déduire $p(\mathbf{p}(\vec{x})) = p(\vec{x})$, ce qui s'écrit $p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{x})$. Ceci étant vérifié pour tout $\vec{x}$ de E , on en déduit l'égalité des applications $p \circ p = p$.
 Même démonstration avec q , ou plus astucieux : on sait que $q = \text{Id}_E - p$, d'où, puisque Id_E et p commutent (Id_E commute avec tous les endomorphismes de E !) :
 $q^2 = (\text{Id}_E - p)^2 = \text{Id}_E^2 - 2\text{Id}_E \circ p + p^2 = \text{Id}_E - 2p + p = \text{Id}_E - p = q!$
2. Rappel : par définition de l'image, pour tout $\vec{x} \in E$, $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (\exists \vec{a} \in E, \vec{x} = p(\vec{a}))$.
 Soit un vecteur $\vec{x} \in E$:
 – Si $p(\vec{x}) = \vec{x}$: alors $\vec{x} = p(?)$ avec $? = \vec{x} \in E$, donc $\vec{x} \in \text{Im}(p)$.
 – Si $\vec{x} \in \text{Im}(p)$: il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{a})$. On en tire $p(\vec{x}) = p(p(\vec{a})) = p \circ p(\vec{a}) = p(\vec{a})$, car $p^2 = p$, puis $p(\vec{x}) = p(\vec{a}) = \vec{x}$, CQFD.
3. – Pour tout $\vec{x} \in E$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}_F \in F$, ce qui prouve l'inclusion : $\text{Im}(p) = \{p(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\} \subset F$.
 Réciproquement : si $\vec{a} \in F$, alors $\vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$ avec $\vec{0} \in G$, d'où $p(\vec{a}) = \vec{a}$, ce qui entraîne $\vec{a} \in \text{Im}(p)$. Ceci étant vrai pour tout $\vec{a} \in F$, on a prouvé l'inclusion $F \subset \text{Im}(p)$.
 Conclusion : par double inclusion, on a prouvé $\text{Im}(p) = F$.
 – Pour tout $\vec{x} \in \text{Ker}(p)$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}_F = \vec{0}$, d'où $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x}_G = \vec{x}_G$, donc $\vec{x} \in G$: ceci prouve l'inclusion $\text{Ker}(p) \subset G$.
 Réciproquement : si $\vec{b} \in G$, alors $\vec{b} = \vec{0} + \vec{b}$, avec $\vec{0} \in F$, d'où $p(\vec{b}) = \vec{0}$ i.e $\vec{b} \in \text{Ker}(p)$. Ceci étant vérifié pour tout $\vec{b} \in G$, on a prouvé $G \subset \text{Ker}(p)$.
 Conclusion : par double inclusion, on a prouvé $\text{Ker}(p) = G$.
4. Par «symétrie», on peut faire les mêmes démonstrations pour q , en inversant les rôles de F , G .
 Autre preuve : on utilise la relation $p + q = \text{Id}_E$ et précisément $q = \text{Id}_E - p$.
 Ainsi, pour tout $\vec{x} \in E$:
 – $(\vec{x} \in \text{Ker}(q)) \Leftrightarrow (q(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Im}(p) = F) \Leftrightarrow (\vec{x} \in F)$.
 Ceci prouve $\text{Ker}(q) = F$.
 – $(\vec{x} \in \text{Im}(q)) \Leftrightarrow (q(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(p) = G) \Leftrightarrow (\vec{x} \in G)$.
 Ceci prouve $\text{Im}(q) = G$.
5. Pour tout $\vec{x} \in E$: $p(\vec{x}) \in F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$, donc $q \circ p(\vec{x}) = q(p(\vec{x})) = \vec{0}$: ceci étant vrai pour tout $\vec{x} \in E$, on en déduit l'égalité des applications $p \circ q = 0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 Autre preuve : $p \circ q = p \circ (\text{Id}_E - p) = p \circ \text{Id}_E - p \circ p = p - p^2 = 0!$

De même, on prouve $q \circ p = 0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

RAPPEL : si f et g sont des applications linéaires : $(f \circ g = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f))$.

Ici, pour prouver $p \circ q = 0$, il suffisait donc de vérifier $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$, ce qui est immédiat car $\text{Im}(q) = G = \text{Ker}(p)$.

Caractérisation des projecteurs dans l'espace vectoriel des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$

Proposition : soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On a la caractérisation suivante des projecteurs dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E :

$$(\varphi \text{ est un projecteur de } E) \Leftrightarrow (\varphi \circ \varphi = \varphi, \quad \text{i.e.} \quad \varphi^2 = \varphi)$$

Dans ce cas, $E = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)$ et φ est le projecteur de base son image $\text{Im}(\varphi)$ et de direction son noyau $\text{Ker}(\varphi)$.

Preuve : soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1^{er} sens ($\Rightarrow$) : c'est immédiat ! On sait que si φ est un projecteur de base A , de direction B , alors, par définition, les sous-espaces A et B sont supplémentaires dans E ($A \oplus B = E$), A est l'image de φ ($A = \text{Im}(\varphi)$), B est le noyau de φ ($B = \text{Ker}(\varphi)$), et $\varphi \circ \varphi = \varphi$ i.e. $\varphi^2 = \varphi$.

2nd sens ($\Leftarrow$) : on suppose que φ est un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^2 = \varphi$.

- Prouvons l'équivalence, pour tout $\vec{x} \in E$: $(\vec{x} \in \text{Im}(\varphi)) \Leftrightarrow (\varphi(\vec{x}) = \vec{x})$?
 - Si $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$, alors $\vec{x} = \varphi(?)$ avec $? = \vec{x} \in E$, donc $\vec{x} \in \text{Im}(\varphi)$, d'où le sens $\Leftarrow$.
 - Réciproquement : si $\vec{x} \in \text{Im}(\varphi)$, alors il existe un $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = \varphi(\vec{a})$, d'où $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\varphi(\vec{a})) = \varphi^2(\vec{a}) = \varphi(\vec{a}) = \vec{x}$ (car $\varphi^2 = \varphi$), d'où le sens $\Rightarrow$.
- Prouvons que les sous-espaces $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont en somme directe ?
 - On a d'abord $\vec{0} \in \text{Im}(\varphi)$ et $\vec{0} \in \text{Ker}(\varphi)$ car ce sont des sous-espaces de l'espace vectoriel E , en tant qu'image et noyau d'un endomorphisme de E . On a donc $\vec{0} \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi)$.
 - Soit un vecteur $\vec{x} \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi)$: on a $\vec{x} \in \text{Im}(\varphi)$, donc $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ (d'après le 1^{er} pas), et $\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi)$, donc $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, d'où l'on tire $\vec{x} = \varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, i.e. $\vec{x} = \vec{0}$.
 - Conclusion : $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}\}$, ce qui prouve que $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont en somme directe.
- Prouvons que E est la somme des sous-espaces $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ i.e. $E = \text{Im}(\varphi) + \text{Ker}(\varphi)$?
 - Analyse : soit $\vec{x}$, un vecteur de E , on suppose $\vec{x} = \vec{i} + \vec{n}$ avec $\vec{i} \in \text{Im}(\varphi)$ et $\vec{n} \in \text{Ker}(\varphi)$ d'où $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$ et $\varphi(\vec{n}) = \vec{0}$. Alors $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{i} + \vec{n}) = \varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{n}) = \vec{i} + \vec{0} = \vec{i}$. On en tire : $\vec{i} = \varphi(\vec{x})$, puis $\vec{n} = \vec{x} - \vec{i} = \vec{x} - \varphi(\vec{x})$.
 - Synthèse : pour tout $\vec{x} \in E$, on pose $\vec{a} = \varphi(\vec{x})$ et $\vec{b} = \vec{x} - \varphi(\vec{x})$. Alors
 - $\vec{a} = \varphi(\vec{x}) \in \text{Im}(\varphi)$ et $\varphi(\vec{b}) = \varphi(\vec{x} - \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}) - \varphi^2(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ i.e. $\varphi(\vec{b}) = \vec{0}$ i.e. $\vec{b} \in \text{Ker}(\varphi)$. Par conséquent, on a bien $\vec{a} \in \text{Im}(\varphi)$ et $\vec{b} \in \text{Ker}(\varphi)$.
 - De plus, $\vec{a} + \vec{b} = \varphi(\vec{x}) + (\vec{x} - \varphi(\vec{x})) = \vec{x}$!
 - Conclusion : $\forall \vec{x} \in E, \exists \vec{a} \in \text{Im}(\varphi), \exists \vec{b} \in \text{Ker}(\varphi), \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$. Ceci signifie : $E = \text{Im}(\varphi) + \text{Ker}(\varphi)$.

4. On donc prouvé : $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E , autrement dit $E = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)$. De plus, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, la décomposition (unique) $\vec{x} = \vec{i} + \vec{n}$, avec $\vec{i} \in \text{Im}(\varphi)$ et $\vec{n} \in \text{Ker}(\varphi)$ est telle que $\vec{i} = \varphi(x)$. Par conséquent, φ est la projection vectorielle sur le sous-espace $\text{Im}(\varphi)$ parallèlement au sous-espace $\text{Ker}(\varphi)$, c'est donc bien un projecteur de E .

Symétries vectorielles

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : autrement dit, $E = F \oplus G$.

Par définition, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E , il existe un unique vecteur $\vec{x}_F$ dans F et un unique vecteur $\vec{x}_G$ dans G tels que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, ce qui peut s'écrire : $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{x}_F \in F, \exists ! \vec{x}_G \in G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$.

On définit l'application s suivante : $s : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & s(\vec{x}) := \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{cases}$.

On dit que s est la **symétrie vectorielle** par rapport au sous-espace F parallèlement au sous-espace G , ou encore **symétrie vectorielle** de **base** F et de **direction** G .

Linéarité des symétries vectorielles

Proposition : une symétrie vectorielle est une application linéaire.

Par conséquent, c'est un endomorphisme de E : $s \in \mathcal{L}(E)$.

Preuve : on calque la démonstration sur celle rédigée pour prouver la linéarité d'une projection vectorielle, en utilisant la propriété suivante : pour tout $\vec{x} \in E = F \oplus G$, si $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} \in F$ et $\vec{b} \in G$, alors $\vec{a} - \vec{b} = s(\vec{x})$, avec s = la symétrie de base F et de direction G .

Autre méthode : pour tout $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ de $E = F \oplus G$, $s(\vec{x}) = \vec{x}_F - \vec{x}_G = 2\vec{x}_F - (\vec{x}_F + \vec{x}_G)$, d'où $s(\vec{x}) = 2p(\vec{x}) - \vec{x} = (2p - \text{Id}_E)(\vec{x})$, où p désigne le projecteur de base F , de direction G . Ceci étant vérifié pour tout $\vec{x} \in E$, on en déduit l'égalité des applications : $s = 2p - \text{Id}_E$. Or, Id_E et p sont des applications linéaires, donc s également, en tant que combinaison d'applications linéaires (rappel : $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel) ! Donc $s \in \mathcal{L}(E)$.

Propriétés élémentaires des symétries vectorielles

Proposition : si $E = F \oplus G$ et si s est la symétrie vectorielle de base F et de direction G alors :

1. $s \circ s = \text{Id}_E$, i.e $s^2 = \text{Id}_E$: on dit que s est une application involutive. Par conséquent, s est bijective i.e s est un automorphisme de l'espace E ($s \in GL(E)$) et sa bijection réciproque est $s^{-1} = s$.
2. $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$.
Ceci signifie : pour tout $\vec{x} \in E$, $(s(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in F)$ et $(s(\vec{x}) = -\vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in G)$.

3. L'application $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est le projecteur de base F et direction G .

Preuves : pour tout $\vec{x} \in E = F \oplus G$, notons $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ la décomposition associée aux supplémentaires F et G de E . On rappelle que, si un vecteur $\vec{z}$ s'écrit $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} \in F$ et $\vec{b} \in G$, alors $s(\vec{z}) = \vec{a} - \vec{b}$.

1. $\forall \vec{x} \in E : s(\vec{x}) = \vec{x}_F - \vec{x}_G = \vec{x}_F + (-\vec{x}_G)$ avec $(-\vec{x}_G) \in G$ (car $\vec{x}_G \in G$ et G est un sous-espace vectoriel), d'où $s(s(\vec{x})) = \vec{x}_F - (-\vec{x}_G) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = \vec{x}$, i.e $s \circ s(\vec{x}) = \vec{x} = \text{Id}_E(\vec{x})$. Ceci étant vrai pour tout $\vec{x} \in E$, on en déduit l'égalité des applications $s^2 = s \circ s = \text{Id}_E$.

2. Tout d'abord, un rappel : si λ est un scalaire ($\lambda \in \mathbb{K}$) et f un endomorphisme de E , alors $(\vec{x} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \Leftrightarrow ((f - \lambda \text{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (f(\vec{x}) - \lambda \vec{x} = \vec{0})$, autrement dit :
 $(\vec{x} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \Leftrightarrow (f(\vec{x}) = \lambda \vec{x})$.

Ici : pour tout $\vec{x} \in E$, notons $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ et $s(\vec{x}) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$. On a :

– $(\vec{x} \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)) \Leftrightarrow (s(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x}_F - \vec{x}_G = \vec{x}_F + \vec{x}_G) \Leftrightarrow (\vec{x}_G = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in F)$.

– $(\vec{x} \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)) \Leftrightarrow (s(\vec{x}) = -\vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x}_F - \vec{x}_G = -(\vec{x}_F + \vec{x}_G)) \Leftrightarrow (\vec{x}_F = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in G)$.

On en tire bien les égalités voulues : $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$.

3. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$, p est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = \left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)\right)^2$ i.e, puisque

s et Id_E commutent : $p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s \circ \text{Id}_E + \text{Id}_E^2) = \frac{1}{4}(\text{Id}_E + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) = p$, i.e $p^2 = p$! C'est donc un projecteur de base $\text{Im}(p)$ et de direction $\text{Ker}(p)$.

Mais $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}(s(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (s(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E))$, i.e $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (\vec{x} \in F)$. Ceci signifie $F = \text{Im}(p)$.

De même $(\vec{x} \in \text{Ker}(p)) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}(s(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (s(\vec{x}) = -\vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E))$, i.e $(\vec{x} \in \text{Ker}(p)) \Leftrightarrow (\vec{x} \in G)$. Ceci signifie $G = \text{Ker}(p)$.

Caractérisation des symétries vectorielles dans l'espace vectoriel des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$

Proposition : soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On a la caractérisation suivante des symétries vectorielles dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E :

$$(\varphi \text{ est une symétrie vectorielle de } E) \Leftrightarrow (\varphi \circ \varphi = \text{Id}_E, \quad \text{i.e} \quad \varphi^2 = \text{Id}_E)$$

Dans ce cas, $E = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ et φ est la symétrie vectorielle de base $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et de direction $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

Preuve : soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1^{er} sens ($\Rightarrow$) : c'est immédiat ! On sait que si φ est une symétrie vectorielle de base A , de direction B , alors, par définition, les sous-espaces A et B sont supplémentaires dans E ($A \oplus B = E$), et $A = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$, $B = \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ et $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_E$ i.e $\varphi^2 = \text{Id}_E$.

2nd sens ($\Leftarrow$) : on suppose que φ est un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^2 = \text{Id}_E$.

1. Prouvons que les sous-espaces $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ sont en somme directe ?

- On a $\vec{0} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\vec{0} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ car ce sont des sous-espaces de l'espace vectoriel E , en tant que noyaux d'endomorphismes de E . On a donc $\vec{0} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.
- Soit un vecteur $\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$: on a $\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$, donc $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$, et $\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$, donc $\varphi(\vec{x}) = -\vec{x}$, d'où l'on tire $\vec{x} = \varphi(\vec{x}) = -\vec{x}$, i.e $\vec{x} = -\vec{x}$, i.e $\vec{x} = \vec{0}$.
- Conclusion : $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) = \{\vec{0}\}$, ce qui prouve que $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ sont en somme directe.

2. Prouvons que E est la somme des sous-espaces $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$?

- Analyse : soit $\vec{x}$, un vecteur de E , on suppose $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$ avec $\vec{i} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\vec{j} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ d'où $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$ et $\varphi(\vec{j}) = -\vec{j}$. Alors $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{i} + \vec{j}) = \varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$.
De $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\varphi(\vec{x}) = \vec{i} - \vec{j}$, on tire : $\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x}))$, puis $\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x}))$.
- Synthèse : pour tout $\vec{x} \in E$, on pose $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x}))$ et $\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x}))$. Alors
– $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x}))) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x}) + \varphi^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{a}$ (car $\varphi^2 = \text{Id}_E$), i.e $\varphi(\vec{a}) = \vec{a}$, donc $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$.
 $\varphi(\vec{b}) = \varphi(\frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x}))) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x}) - \varphi^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x}) - \vec{x}) = -\frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x})) = -\vec{b}$, i.e $\varphi(\vec{b}) = -\vec{b}$, donc $\vec{b} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.
Par conséquent, on a bien $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\vec{b} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.
– De plus : $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x})) = \vec{x}$! On a bien $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x}$.
- Conclusion : $\forall \vec{x} \in E, \exists \vec{a} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E), \exists \vec{b} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E), \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.
Ceci signifie : $E = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) + \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

3. On a donc prouvé : $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E , autrement dit $E = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

De plus, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, la décomposition (unique) $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$, avec $\vec{i} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\vec{j} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ est telle que $\vec{i} - \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x})) - \frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{x})$, i.e $\varphi(\vec{x}) = \vec{i} - \vec{j}$.
Par conséquent, φ est la symétrie vectorielle par rapport au sous-espace $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ parallèlement au sous-espace $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

AUTRE PREUVE POUR LE 2ND SENS ($\Leftarrow$) utilisant les résultats connus sur les projecteurs

Supposons que φ est un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^2 = \text{Id}_E$.

Définissons l'application linéaire $p = \frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)$: c'est un endomorphisme de E vérifiant

$$p^2 = \frac{1}{4}(\varphi^2 + 2\varphi \circ \text{Id}_E + \text{Id}_E^2) = \frac{1}{4}(\text{Id}_E + 2\varphi + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E) = p, \text{ i.e } p^2 = p!$$

Par conséquent, p est un projecteur de E de base $\text{Im}(p)$ et de direction $\text{Ker}(p)$, sous-espaces supplémentaires dans E (on a donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$).

De plus, on a les équivalences suivantes, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$:

- $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{x}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}\varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{x}) \Leftrightarrow (\varphi(\vec{x}) = \vec{x})$, d'où $(\vec{x} \in \text{Im}(p)) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E))$, ce qui signifie $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$.
- $(\vec{x} \in \text{Ker}(p)) \Leftrightarrow (p(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}\varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\varphi(\vec{x}) = -\vec{x})$, d'où $(\vec{x} \in \text{Ker}(p)) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E))$, ce qui signifie $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

Ainsi, on récupère $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$, puis on vérifie de la même façon que s est la symétrie vectorielle par rapport à $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.

Remarque : si f est une application linéaire et λ , un scalaire non nul ($\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$), alors on vérifie facilement que $\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(\lambda f) = \text{Im}(f)$.

En effet :

- $(\vec{x} \in \text{Ker}(\lambda f)) \Leftrightarrow (\lambda f(\vec{x}) = \vec{0}) \Leftrightarrow (f(\vec{x}) = \vec{0} \text{ car } \lambda \neq 0) \Leftrightarrow (\vec{x} \in \text{Ker}(f))$
d'où l'égalité $\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker}(f)$.
- $(\vec{x} \in \text{Im}(\lambda f)) \Rightarrow (\exists \vec{a} \in E, \vec{x} = \lambda f(\vec{a})) \Rightarrow (\exists \vec{a} \in E, \vec{x} = f(\lambda \vec{a})) \Rightarrow (\exists \vec{b} \in E, \vec{x} = f(\vec{b}))$ car $(\vec{a} \in E) \Rightarrow (\vec{b} = \lambda \vec{a} \in E)$: on a donc prouvé $(\vec{x} \in \text{Im}(\lambda f)) \Rightarrow (\vec{x} \in \text{Im}(f))$ d'où l'on tire l'inclusion $\text{Im}(\lambda f) \subset \text{Im}(f)$, vraie pour tout $\lambda \neq 0$.

On en déduit $\text{Im}(f) = \text{Im}(\frac{1}{\lambda} \lambda f) \subset \text{Im}(\lambda f)$ en utilisant ce qui vient juste d'être prouvé avec le scalaire non nul $\frac{1}{\lambda} \neq 0$. Par double inclusion, on a prouvé $\text{Im}(\lambda f) = \text{Im}(f)$.

Ici, comme on a posé $p = \frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)$, on en déduit $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(\frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)) = \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$. De même, $\text{Im}(p) = \text{Im}(\frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)) = \text{Im}(\varphi + \text{Id}_E)$: ce n'est pas ce qu'on attendait, mais en posant $q = \text{Id}_E - p$ (projecteur associé à p), on sait que $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$, avec $q = \text{Id}_E - p = \text{Id}_E - \frac{1}{2}(\varphi + \text{Id}_E)$ i.e $q = \frac{1}{2}(\text{Id}_E - \varphi)$, d'où $\text{Ker}(q) = \text{Ker}(\frac{1}{2}(\text{Id}_E - \varphi)) = \text{Ker}(\text{Id}_E - \varphi) = \text{Ker}((-1)(\varphi - \text{Id}_E)) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$. On retrouve bien $\text{Im}(p) = \text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$.

Complément : si on suppose $\varphi^2 = \text{Id}_E$, on en déduit $\varphi^2 - \text{Id}_E = 0$ puis $(\varphi - \text{Id}_E) \circ (\varphi + \text{Id}_E) = 0$ et $(\varphi + \text{Id}_E) \circ (\varphi - \text{Id}_E) = 0$. On peut donc déjà en tirer directement les inclusions suivantes :

$\text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\varphi - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$. En fait, ce sont des égalités.

En effet, en remarquant que, pour tout $\vec{x} \in E$, on a l'égalité $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \varphi(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \varphi(\vec{x}))$, on en déduit $E = \text{Im}(\frac{1}{2}(\text{Id}_E + \varphi)) + \text{Im}(\frac{1}{2}(\text{Id}_E - \varphi))$.

Mais $\text{Im}(\frac{1}{2}(\text{Id}_E + \varphi)) = \text{Im}(\varphi + \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\frac{1}{2}(\text{Id}_E - \varphi)) = \text{Im}(\varphi - \text{Id}_E)$ d'où

$E = \text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) + \text{Im}(\varphi - \text{Id}_E)$.

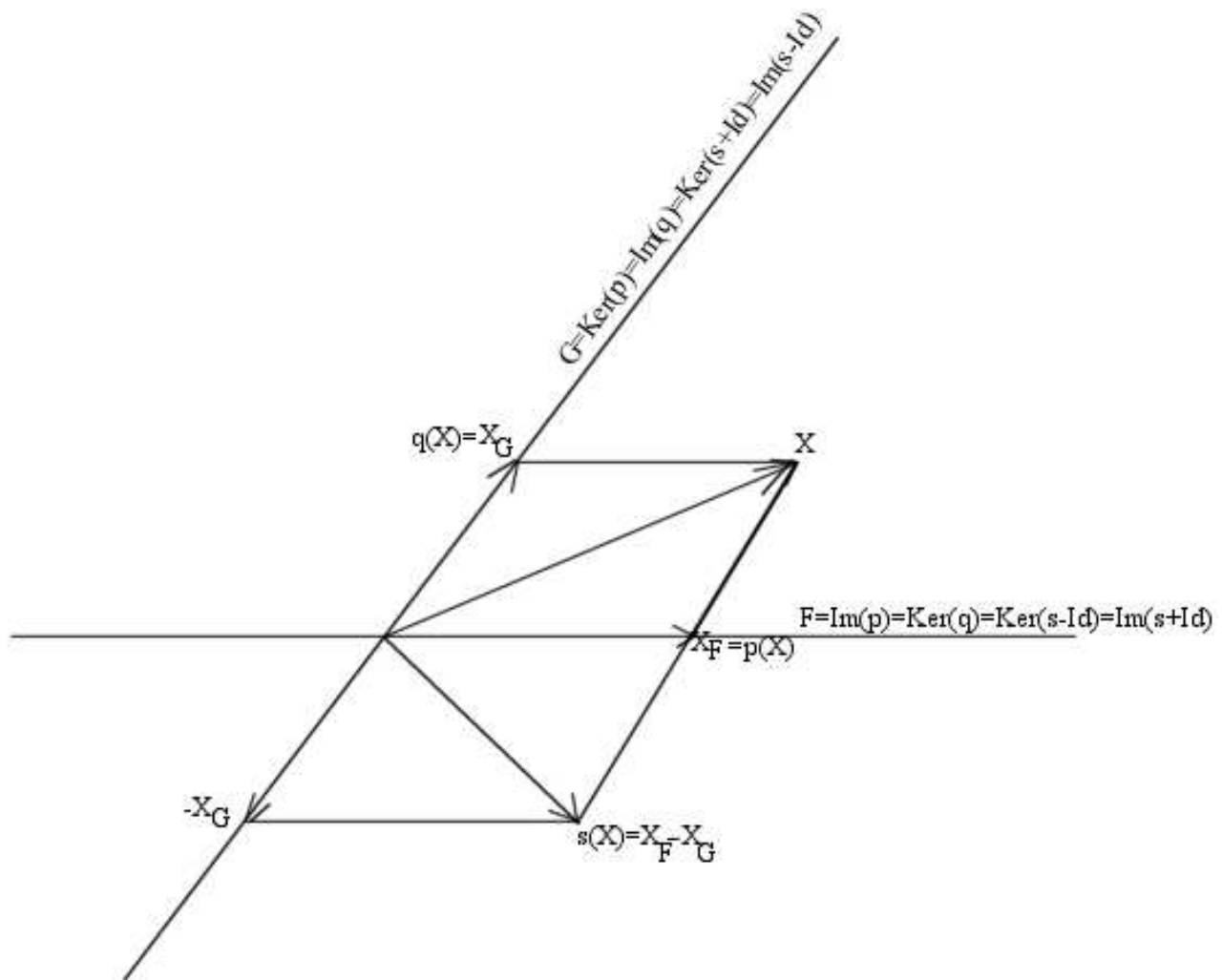
Or $\text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\varphi - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ d'où (voir ci-après pour la preuve) :

- $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) + \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) = E$.
- il est facile de vérifier que $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$ sont en somme directe, ce qui entraîne que $\text{Im}(\varphi + \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\varphi - \text{Id}_E)$ sont eux aussi en somme directe ! Ils sont donc supplémentaires dans E .

De tout cela (voir ci-après pour la preuve), on déduit

$E = \text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(\varphi - \text{Id}_E)$, $E = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$, et les inclusions trouvées au début sont donc bien des égalités :

$\text{Im}(\varphi + \text{Id}_E) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\varphi - \text{Id}_E) = \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$.



Exercice Soit A, B, C et D quatre sous-espaces d'un espace vectoriel E .

On suppose que $A + B = E$ et $A \subset C$ et $B \subset D$.

1. Montrer que $C + D = E$.
2. On suppose que C et D sont en somme directe : montrer que A et B sont aussi en somme directe.
3. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Preuve

1. C et D étant des sous-espaces de E , la somme $C + D$ est un sous-espace de E , par conséquent on a déjà $(C + D) \subset E$.
De plus, on a $A \subset C$ et $B \subset D$: donc, $(A + B) \subset (C + D)$, i.e avec l'hypothèse $A + B = E$, on en tire $E \subset (C + D)$.
Par double inclusion, on a bien prouvé l'égalité : $C + D = E$.
2. Si C et D sont en somme directe, cela signifie exactement : $C \cap D = \{\vec{0}\}$. Or, des inclusions $A \subset C$ et $B \subset D$ on peut tirer l'inclusion $(A \cap B) \subset (C \cap D)$, i.e $A \cap B \subset \{\vec{0}\}$. Or, l'inclusion inverse est toujours vraie, car A et B sont des sous-espaces de E donc contiennent bien le vecteur nul $\vec{0}$. Conclusion : on a $A \cap B = \{\vec{0}\}$, ce qui signifie que A et B sont en somme directe.
3. Pour tout vecteur $\vec{c} \in C$: $\vec{c}$ est un vecteur de $E = A + B$, car C est un sous-espace de E . Il existe donc deux vecteurs $\vec{a} \in A$ et $\vec{b} \in B$ tels que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. De cette égalité, on tire : $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b}$.
Or, $\vec{a} \in A \subset C$, et $\vec{c} \in C$, donc $\vec{c} - \vec{a} \in C$ (car C est un sous-espace, donc stable par combinaison linéaire).
Et $\vec{b} \in B \subset D$, donc on a l'appartenance $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b} \in D$.
En conclusion $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b}$ est un vecteur appartenant à C et à D i.e à $C \cap D$. Or, C et D sont en somme directe, donc $C \cap D = \{\vec{0}\}$ et par conséquent $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, d'où l'on tire $\vec{c} = \vec{a}$, ce qui entraîne $\vec{c} \in A$. Ceci étant vérifié pour tout vecteur $\vec{c} \in C$, on en déduit l'inclusion $C \subset A$. Or l'inclusion inverse $A \subset C$ est vraie par hypothèse, on en déduit donc l'égalité des sous-espaces $A = C$.
De même, on prouve $B = D$.