Intégration.

Chap. 03 : cours complet.

Théorème 6.3 : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$.
Théorème 6.4 : cas d'une fonction admettant une limite en $+\infty$
Théorème 6.5 : utilisation d'une fonction majorante
Théorème 6.6 : linéarité
Théorème 6.7 : relation de Chasles
Théorème 6.8 : positivité et croissance de l'intégrale sur un intervalle
Théorème 6.9 : cas de nullité d'une intégrale de fonction continue et positive

7. Critères d'intégrabilité, opérations sur les fonctions intégrables sur un intervalle.

Théorème 7.1 : utilisation d'un équivalent
Théorème 7.2 : utilisation d'un « petit o »
Théorème 7.3 : comparaison avec une fonction puissance
Théorème 7.4 : (hors programme) intégrales de Bertrand
Théorème 7.5 : changement de variable

1. Intégrale sur un segment d'une fonction réelle de variable réelle, en escaliers (Sup).

Théorème 1.1 : résultat préparatoire pour l'intégrale sur un segment d'une fonction en escaliers

Soit f une fonction en escaliers de [a,b] dans $\mathbb{R}$.
Soit : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision de [a,b] adaptée à f, c'est-à-dire telle que pour tout : $1 \leq i \leq n$, f garde une valeur constante λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$.

Le réel $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).\lambda_i$ est indépendant de la subdivision de [a,b] adaptée à f.

Démonstration :

• Soit : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision adaptée à f, et c une valeur différente de ces (n+1) valeurs, entre par exemple a_{n-1} et a_n.
Alors la nouvelle subdivision notée $a'_0, \ldots, a'_{n+1}$ est toujours adaptée à f (car f est constante sur $]a_{n-1}, a_n[$, donc aussi sur $]a_{n-1}, c[$ et sur $]c, a_n[$), et conduit à la valeur : $\sum_{i=1}^{n+1} (a'_i - a'_{i-1}).\lambda'_i$, soit encore :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a'_i - a'_{i-1}).\lambda'_i + (a'_n - a'_{n-1}).\lambda'_n + (a'_{n+1} - a'_n).\lambda'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i-1}).\lambda_i + [c - a_{n-1} + a_n - c].\lambda_n,$$ et donc à

$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).\lambda_i$, c'est-à-dire la valeur pour la première subdivision.

• Soient maintenant : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, et : $a = a'_0 < \ldots < a'_p = b$, deux subdivisions adaptées à f.
Notons $b_0, \ldots, b_q$ la subdivision de [a,b] obtenue en rassemblant les deux subdivisions précédentes.
Elles s'en déduisent en leur rajoutant respectivement au plus p et n points (et même (p – 2) et (n – 2)).
Donc par récurrence sur le nombre de points rajoutés, les subdivisions $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_q)$ donnent le même réel, de même que $(a'_0, \ldots, a'_p)$ et $(b_0, \ldots, b_q)$.
Finalement, les deux subdivisions considérées conduisent au même résultat.

Définition 1.1 : intégrale sur un segment d'une fonction en escaliers à valeurs réelles

Soit f une fonction en escaliers de [a,b] dans $\mathbb{R}$.
On appelle intégrale de f sur [a,b] la valeur, commune à toutes les subdivisions : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, de [a,b] adaptées à f, du réel $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).\lambda_i$, et on la note $\int_a^b f(t).dt$ ou $\int_a^b f$.

Théorème 1.2 : espace vectoriel des fonctions en escaliers sur un segment

L'ensemble E(a,b) des fonctions en escaliers de [a,b] dans $\mathbb{R}$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'intégrale sur [a,b] est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration :

• E(a,b) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ainsi qu'on l'a montré dans le chapitre 7 (noté alors Esc([a,b],$\mathbb{R}$)).
• L'application « intégrale sur [a,b] » est alors définie de E(a,b) dans $\mathbb{R}$.
Elle est de plus linéaire.
En effet, si f et g sont en escaliers sur [a,b], notons : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision adaptée à la fois à f et à g (obtenue en rassemblant par les exemples des subdivisions de [a,b] adaptées séparément à f et à g).
Soit par ailleurs : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la subdivision précédente est adaptée à f, à g et à $(\alpha.f + \beta.g)$, puisque f, g et $(\alpha.f + \beta.g)$ sont clairement constantes sur chaque sous-intervalle.

Puis : $\int_a^b [\alpha.f + \beta.g] = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).[\alpha.\lambda_i + \beta.\mu_i] = \alpha.\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).\lambda_i + \beta.\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}).\mu_i = \alpha.\int_a^b f + \beta.\int_a^b g$.

Donc c'est bien une forme linéaire sur E(a,b).

Théorème 1.3 : positivité et croissance de l'intégrale sur un segment pour les fonctions en escaliers

L'intégrale sur [a,b], définie sur E(a,b), a les propriétés suivantes :

- $\forall f \in E(a,b)$, $(f \geq 0) \Rightarrow (\int_a^b f(t).dt \geq 0)$.
- $\forall (f,g) \in E(a,b)^2$, $(f \geq g) \Rightarrow (\int_a^b f(t).dt \geq \int_a^b g(t).dt)$.
- $\forall f \in E(a,b)$, $\left|\int_a^b f(t).dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|.dt$.

Démonstration :

- Si f est en escaliers sur [a,b], à valeurs positives, toutes les valeurs constantes qu'elle prendra sur chaque sous-intervalle seront positives, et il est alors immédiat que : $\int_a^b f(t).dt \geq 0$.
- Si f et g sont en escaliers sur [a,b], avec : $f \geq g$, alors $(f - g)$ est encore en escaliers sur [a,b], avec de plus : $f - g \geq 0$.

Donc : $\int_a^b [f(t) - g(t)].dt \geq 0$, et la linéarité de l'intégrale conduit à : $\int_a^b f(t).dt \geq \int_a^b g(t).dt$.

- Puis, si f est en escaliers sur [a,b], avec : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision de [a,b] adaptée à f,

alors : $\left|\int_a^b f(t).dt\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}).\lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}).|\lambda_i| = \int_a^b |f(t)|.dt$,

puisque sur chaque sous-intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, |f| est bien constante à la valeur $|\lambda_i|$.

Théorème 1.4 : relation de Chasles dans le cas des fonctions en escaliers sur [a,b]

Soit [a,b] un segment de ℝ, et : $a < c < b$.

Alors pour toute fonction f en escaliers sur [a,b], les restrictions de f à [a,c] et [c,b] sont en escaliers et :

$$\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt.$$

Démonstration :

Soit f en escaliers sur [a,b] et : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision de [a,b] adaptée à f.

En introduisant au besoin c parmi les (n+1) points précédents, on obtient deux subdivisions $(a'_0, \ldots, a'_p)$ et $(a'_p, \ldots, a'_{n+1})$ de [a,c] et [c,b] respectivement adaptées à f sur [a,c] et [c,b], puisque sur tous les sous-intervalles obtenus, f y reste bien constante.

Puis : $\int_a^b f(t).dt = \sum_{i=1}^{n+1}(a'_i - a'_{i-1}).\lambda_i = \sum_{i=1}^{p}(a'_i - a'_{i-1}).\lambda_i + \sum_{i=p+1}^{n+1}(a'_i - a'_{i-1}).\lambda_i = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt$.

2. Intégrale sur un segment d'une fonction réelle de variable réelle, continue par morceaux (Sup).

Théorème 2.1 : approximation sur un segment d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers

Soit [a,b] un segment de ℝ et f un élément de $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.

Pour tout : $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers sur [a,b], φ et ψ, telles que :

- $\varphi \leq f \leq \psi$,
- $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Démonstration :

Soit f une fonction continue par morceaux de [a,b] dans ℝ.

- f peut s'écrire comme somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers sur [a,b] : $f = g + e$.

En effet, si f est continue, elle s'écrit : $f = f + 0$.

Si f ne présente qu'un point de discontinuité c, entre a et b, on définit alors g par :

$\forall x < c$, $g(x) = f(x)$,

$g(c) = \lim_{c^-} f$,

$\forall x > c$, $g(x) = f(x) - (\lim_{c^+} f - \lim_{c^-} f)$, autrement dit f décalée du saut qu'elle présente en c.

La fonction : $e = (f - g)$ est alors en escaliers sur [a,b], puisque constante sur [a,c[et sur]c,b].

La fonction g est quant à elle, continue sur [a,b], puisqu'elle est continue sur [a,c[et sur]c,b] (comme f) et en c, elle est continue à droite puisque : $\lim_{c^+} g = \lim_{c^+} f - (\lim_{c^+} f - \lim_{c^-} f) = \lim_{c^-} f = g(c)$, et par évidence, continue à gauche.

On a obtenu dans ce cas : $f = g + e$.

Supposons maintenant que cette décomposition soit possible pour toute fonction continue par morceaux

sur [a,b], et y présentant n points de discontinuité.
Si f présente alors (n+1) points de discontinuité sur [a,b], la construction précédente (appliquée au premier point de discontinuité de f) permet de l'écrire comme somme d'une fonction en escaliers sur [a,b] (à deux paliers) et d'une fonction continue par morceaux sur [a,b] et ne présentant plus que n points de discontinuité sur [a,b], soit : $f = g_1 + e_1$.
Or g_1 par hypothèse de récurrence peut s'écrire : $g_1 = g_{n+1} + e_{n+1}$, et finalement : $f = g_{n+1} + (e_1 + e_{n+1})$, où g_{n+1} est continue sur [a,b], et e_1 et e_{n+1} sont en escaliers sur [a,b], donc de somme également en escaliers sur [a,b].
• la fonction g étant continue sur [a,b], elle y est uniformément continue (théorème de Heine).
Soit donc : $\varepsilon > 0$. Il existe : $\eta > 0$, tel que : $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $(|x - y| \le \eta) \Rightarrow (|g(x) - g(y)| \le \varepsilon)$.
Notons N l'entier : $N = E\left(\frac{b-a}{\eta}\right)+1$, et : $\forall\, 0 \le k \le N$, $a_k = a + k.\left(\frac{b-a}{N}\right)$.
Puisque g est continue sur [a,b], elle admet sur chaque sous-intervalle $[a_k,a_{k+1}]$ (pour : $0 \le k \le N - 1$), une borne supérieure et une borne inférieure que l'on peut noter respectivement m_k et M_k.
Comme g est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, m_k et M_k sont atteints en deux points x_k et y_k du sous-intervalle.
Or : $|x_k - y_k| \le |a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{N} \le \eta$, et : $M_k - m_k = |m_k - M_k| = |g(x_k) - g(y_k)| \le \varepsilon$.
On définit alors deux fonctions φ et ψ en escaliers sur [a,b] par :
$\forall\, 0 \le k \le N - 1$, $\forall x \in [a_k, a_{k+1}[$, $\varphi(x) = m_k$, $\psi(x) = M_k$,
$\varphi(b) = m_{N-1}$, et : $\psi(b) = M_{N-1}$.
Il est immédiat que : $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \le g(x) \le \psi(x)$, et :
$\forall x \in [a,b]$, $\exists k \in \{0, \dots, N - 1\}$, $\psi(x) - \varphi(x) = M_k - m_k \le \varepsilon$.
• enfin, les fonctions $(\varphi + e)$ et $(\psi + e)$ sont toujours en escaliers sur [a,b], et vérifient les conditions demandées pour f.

Théorème 2.2 et définition 2.1 : intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment
Soit [a,b] un segment de $\mathbb{R}$ et f un élément de $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.
Les ensembles : $A = \{\int_a^b \varphi(t).dt,\ \varphi \in E(a,b),\ \varphi \le f\}$, et : $B = \{\int_a^b \psi(t).dt,\ \psi \in E(a,b),\ \psi \ge f\}$, sont des parties de $\mathbb{R}$, qui admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales entre elles.
Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur [a,b], et est notée encore $\int_a^b f(t).dt$ ou $\int_a^b f$.
Lorsque f est en escaliers sur [a,b], cette valeur coïncide avec la définition donnée dans la partie 1.

Démonstration :
Soit donc f continue par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$.
On peut trouver, d'après le théorème 2.1 deux fonctions φ_1 et ψ_1 en escaliers sur [a,b], telles que :
$\varphi_1 \le f \le \psi_1$, et : $\psi_1 - \varphi_1 \le 1$.
Donc A et B sont non vides.
Puis : $\forall \varphi \in E(a,b)$, $\varphi \le f$, on a : $\varphi \le \psi_1$, et donc : $\int_a^b \varphi(t).dt \le \int_a^b \psi_1(t).dt$.
Donc A est majorée par $\int_a^b \psi_1(t).dt$, et admet donc une borne supérieure : $\alpha = \sup(A)$.
De même, B est minorée par $\int_a^b \varphi_1(t).dt$, et admet une borne inférieure : $\beta = \inf(B)$.
Puisque de plus, pour φ et ψ en escaliers sur [a,b], telles que : $\varphi \le f \le \psi$, on a : $\int_a^b \varphi(t).dt \le \int_a^b \psi(t).dt$, on en déduit que : $\alpha \le \beta$.
Enfin, pour : $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ en escaliers sur [a,b] telles que : $\varphi \le f \le \psi$, et : $\psi - \varphi \le \varepsilon$.
Donc pour ces deux fonctions, on a : $\int_a^b \psi(t).dt - \int_a^b \varphi(t).dt \le \varepsilon.(b - a)$, d'où :
$\beta \le \int_a^b \psi(t).dt \le \int_a^b \varphi(t).dt + \varepsilon.(b - a) \le \alpha + \varepsilon.(b - a)$.
Mais puisque cette double inégalité est vraie pour tout : $\varepsilon > 0$, on en déduit : $\beta \le \alpha$.
Finalement : $\alpha = \beta$.
Par ailleurs, si f est une fonction en escaliers sur [a,b], α et β sont alors toutes deux égales à $\int_a^b f(t).dt$, car dans ce cas, les bornes supérieure de A et inférieure de B correspondent respectivement à un plus

grand et un plus petit élément.

Théorème 2.3 : linéarité de l'intégrale sur un segment
L'intégrale sur [a,b] est une forme linéaire sur $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration :

• Il est clair tout d'abord que c'est une application de $CM([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
• Soient maintenant deux fonctions f et g, éléments de $CM([a,b],\mathbb{R})$.
Alors (f+g) est continue par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$, et :
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ (\varphi_f, \varphi_g) \in E(a,b)^2, \exists\ (\psi_f, \psi_g) \in E(a,b)^2, \varphi_f \le f \le \psi_f, \varphi_g \le g \le \psi_g, (\psi_f - \varphi_f) \le \varepsilon/2, (\psi_g - \varphi_g) \le \varepsilon/2.$
Or : $(\varphi_f + \varphi_g) \in E(a,b)$, tout comme $(\psi_f + \psi_g)$, et :

$$\int_a^b (f+g) \le \int_a^b (\psi_f + \psi_g) = \int_a^b \psi_f + \int_a^b \psi_g \le \int_a^b \varphi_f + \int_a^b \varphi_g + 2.(b-a).\varepsilon/2 \le \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.(b-a) .$$

Or ceci étant vrai pour tout : $\varepsilon > 0$, on en déduit que : $\int_a^b (f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g$.

Mais on a de même :

$$\int_a^b f + \int_a^b g \le \int_a^b \psi_f + \int_a^b \psi_g \le \int_a^b \varphi_f + \int_a^b \varphi_g + 2.(b-a).\varepsilon/2 \le \int_a^b (\varphi_f + \varphi_g) + \varepsilon.(b-a) \le \int_a^b (f+g) + \varepsilon.(b-a).$$

Et là encore, cette inégalité étant vraie pour tout : $\varepsilon > 0$, on a à nouveau : $\int_a^b f + \int_a^b g \le \int_a^b (f+g)$.

On en déduit finalement l'égalité attendue : $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$.

• Soit ensuite f continue par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$, et : $\lambda > 0$.
On peut trouver φ et ψ telles que : $(\varphi,\psi) \in E(a,b)^2$, $\varphi \le f \le \psi$, $\psi - \varphi \le \varepsilon$.
Cela permet alors d'écrire : $\int_a^b \lambda.f \le \int_a^b \lambda.\psi = \lambda.\int_a^b \psi \le \lambda.\int_a^b \varphi + \lambda.(b-a).\varepsilon \le \lambda.\int_a^b f + \lambda.\varepsilon.(b-a)$,

et l'inégalité étant vraie pour tout : $\varepsilon > 0$, on en déduit comme auparavant que : $\int_a^b \lambda.f \le \lambda.\int_a^b f$.

De même qu'au dessus, on obtient : $\lambda.\int_a^b f \le \int_a^b \lambda.f$, et finalement l'égalité : $\int_a^b \lambda.f = \lambda.\int_a^b f$.

Si on a par ailleurs : $\lambda = 0$, il est immédiat que l'égalité précédente reste valable.
Enfin, si : $\lambda < 0$, alors pour un : $\varepsilon > 0$, et les fonctions φ et ψ précédentes, on constate que $\lambda.\varphi$ et $\lambda.\psi$ sont en escaliers sur [a,b], et : $\lambda.\psi \le \lambda.f \le \lambda.\varphi$, $\lambda.\varphi - \lambda.\psi \le -\lambda.\varepsilon$.
En travaillant comme pour : $\lambda > 0$, on en déduit que : $\int_a^b \lambda.f \le \lambda.\int_a^b f - \lambda.\varepsilon.(b-a)$, puis : $\int_a^b \lambda.f \le \lambda.\int_a^b f$, ainsi que l'inégalité inverse, d'où une fois de plus, l'égalité attendue.
Finalement, l'intégrale sur [a,b], constitue bien une forme linéaire sur CM([a,b]).

Théorème 2.4 : positivité et croissance de l'intégrale sur un segment
Soit [a,b] un segment de $\mathbb{R}$.
L'intégrale sur [a,b], définie sur $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, a les propriétés suivantes :

• $\forall\ f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, $(f \ge 0) \Rightarrow (\int_a^b f(t).dt \ge 0)$.

• $\forall\ (f,g) \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})^2$, $(f \ge g) \Rightarrow (\int_a^b f(t).dt \ge \int_a^b g(t).dt)$.

• $\forall\ f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, $\left|\int_a^b f(t).dt\right| \le \int_a^b |f(t)|.dt$.

• $\forall\ f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, avec : $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, et : $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, on a : $m.(b-a) \le \int_a^b f(t).dt \le M.(b-a)$.

Démonstration :

• Puisque pour : $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, positive, f est minorée par la fonction nulle, en escaliers sur [a,b], alors par définition de l'intégrale de f sur [a,b], on peut écrire :

$$0 = \int_a^b 0.dt \le \int_a^b f(t).dt .$$

• Il suffit ici d'utiliser le résultat démontré avant, et la linéarité de l'intégrale sur [a,b] dans $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.
• Pour toute fonction f continue par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$, on a : $f \le |f|$, et : $-f \le |f|$.
Donc en intégrant sur [a,b], on en déduit que :

$\int_a^b f(t).dt \leq \int_a^b |f(t)|.dt$, et : $-\int_a^b f(t).dt \leq \int_a^b -f(t).dt \leq \int_a^b |f(t)|.dt$.

Comme $\left|\int_a^b f(t).dt\right|$ vaut $\int_a^b f(t).dt$ ou $-\int_a^b f(t).dt$, on en déduit l'inégalité annoncée.

• Puisque toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs réelles est majorée et minorée sur ce segment, et qu'alors : $m \leq f \leq M$, sur $[a,b]$, il suffit d'intégrer pour obtenir le résultat.

Définition 2.2 : valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit : $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$, le réel $\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt$.

Théorème 2.5 : cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, positive sur $[a,b]$ et telle que : $\int_a^b f(t).dt = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration :

Travaillons par contraposée, et pour cela, soit f continue, positive sur $[a,b]$, non nulle.
Alors il existe une valeur : $c \in [a,b]$, telle que : $f(c) > 0$.

Puisque f est continue en c, alors : $\exists \eta > 0, \forall x \in [a,b], (|x - c| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon = \frac{f(c)}{2})$.

Donc sur le segment : $I = ([a,b] \cap [c - \eta, c + \eta])$, on a : $-\frac{f(c)}{2} \leq f - f(c) \leq \frac{f(c)}{2}$, et donc : $f \geq \frac{f(c)}{2}$.

On peut alors minorer f sur $[a,b]$ par la fonction en escaliers φ, nulle en dehors de I et constante à la valeur $\frac{f(c)}{2}$ sur I.

Enfin, si on note L la longueur (non nulle) de I, on constate alors que : $\int_a^b f(t).dt \geq \int_a^b \varphi(t).dt = L.\frac{f(c)}{2} > 0$.

L'intégrale de f sur $[a,b]$ est alors strictement positive et donc non nulle.

Définition 2.3 : intégrale dont les bornes sont égales ou inversées

Soient : $a > b$.

Pour f continue par morceaux de $[b,a]$ dans $\mathbb{R}$, on note $\int_a^b f(t).dt$ la valeur : $\int_a^b f(t).dt = -\int_b^a f(t).dt$.

On note également : $\int_a^a f(t).dt = 0$.

Toutes les propriétés précédentes vues sur un segment se généralisent dans le cas où les bornes de l'intégrale considérée sont égales ou inversées.

Théorème 2.6 : relation de Chasles

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et : $a < c < b$.
Alors pour toute fonction : $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont continues par morceaux respectivement de $[a,c]$ et $[c,b]$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt.$$

La relation de Chasles reste valable pour : $a \leq b \leq c$, (ou : $c \leq a \leq b$) et f continue par morceaux de $[a,c]$ (ou $[c,b]$) dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Comme précédemment, soit f continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Que c soit un point de discontinuité de f ou pas, il est clair que les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ (en examinant leur comportement en particulier en c) sont continues par morceaux.
Puis, pour : $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ_1 et ψ_1 d'une part, φ_2 et ψ_2 d'autre part, en escaliers sur $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement, telles que :

$\varphi_1 \leq f_{|[a,c]} \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq f_{|[c,b]} \leq \psi_2$, $\psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon$, $\psi_2 - \varphi_2 \leq \varepsilon$.

Alors les fonctions φ et ψ définies sur $[a,b]$ par :

- $\forall$ x $\in$ [a,c[, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, $\varphi(x) = \psi_1(x)$,
- $\forall$ x $\in$ [c,b], $\varphi(x) = \varphi_2(x)$, $\psi(x) = \psi_2(x)$,

sont en escaliers sur [a,b] et vérifient : $\varphi \leq f \leq \psi$, $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.
En travaillant encore comme précédemment (et en utilisant la relation de Chasles, mais pour les fonctions en escaliers) par double inégalité, valable pour tout : $\varepsilon > 0$, on conclut alors à l'égalité voulue.
Avec les définitions prises pour les intégrales dont les bornes sont égales ou inversées, on obtient également cette relation dans les cas : $a \leq b \leq c$, ou : $c \leq a \leq b$.

Définition 2.4 : somme de Riemann associée à une fonction continue sur un segment

Soit [a,b] un segment de ℝ et : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision de [a,b].
Soit f une fonction continue de [a,b] dans ℝ.

On appelle somme de Riemann associée à f une expression du type : $S = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i).f(x_i)$,

où : $\forall\ 0 \leq i \leq n-1$, $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Théorème 2.7 : approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide de sommes de Riemann

Soit [a,b] un segment de ℝ et : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, une subdivision de [a,b].
Soit f une fonction continue de [a,b] dans ℝ.
Pour tout : $\varepsilon > 0$, il existe : $\alpha > 0$, tel que pour toute subdivision : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, de [a,b], on a :

$$\left(\max_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i) \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(\left|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i).f(x_i) - \int_a^b f(t).dt\right| \leq \varepsilon\right).$$

La quantité $\max_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i)$ est appelée « pas de la subdivision ».

Démonstration :

La fonction f étant continue sur le segment [a,b], elle y est uniformément continue.

Donc : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall\ (x,y) \in [a,b], (|x - y| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a})$.

Puis considérons une subdivision : $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, de [a,b] telle que : $\max_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i) \leq \alpha$.

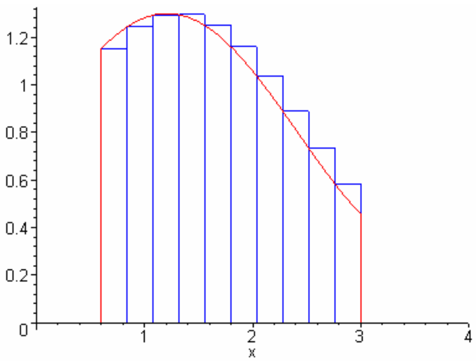
On constate alors que : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $\forall\ t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|t - x_k| \leq \alpha$, d'où : $|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Donc : $\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t).dt - (a_{k+1} - a_k).f(x_k)\right| = \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}[f(t) - f(x_k)].dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.(a_{k+1} - a_k)$.

Soit finalement : $\left|\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k).f(x_k) - \int_a^b f(t).dt\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}.(a_{k+1} - a_k) = \frac{\varepsilon}{b-a}.(a_n - a_0) = \varepsilon$.

Définition 2.5 et théorème 2.8 : approximation par des rectangles ou des trapèzes de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue

Soit [a,b] un segment de ℝ et soit f une fonction continue de [a,b] dans ℝ.
On appelle sommes de Riemann gauches (et droites) de f sur [a,b] les sommes de Riemann correspondant aux subdivisions définies par : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $a_k = a + k.\frac{b-a}{n}$, (qui sont donc de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$, taille de chacun des sous-intervalles qui les définissent) et à des valeurs x_k données par :



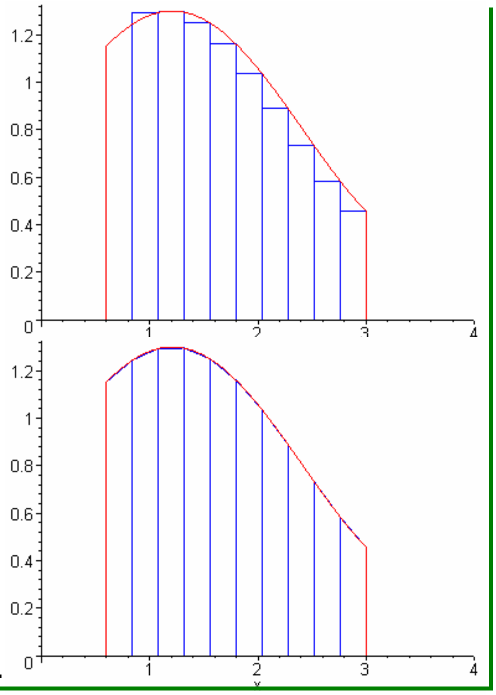
- Sommes de Riemann gauches : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $x_k = a_k$,

  soit : $S_{g,n} = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$,

- Sommes de Riemann droites : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $x_k = a_{k+1}$.

soit : $S_{d,n} = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1).\frac{b-a}{n}\right)$.

ou encore : $S_{d,n} = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$.



Les deux suites $(S_{g,n})$ et $(S_{d,n})$ convergent vers $\int_a^b f(t).dt$ et s'appellent approximations (gauches et droites) de $\int_a^b f(t).dt$ par des rectangles.

- La quantité, pour n donné, définie par : $S_{t,n} = \frac{1}{2}.(S_{g,n} + S_{d,n})$,

est appelée approximation de $\int_a^b f(t).dt$ par des trapèzes et la suite $(S_{t,n})$ converge également vers $\int_a^b f(t).dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque : chaque demi-somme obtenue en rassemblant les deux rectangles correspond à la surface des trapèzes dessinés ci-dessus.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux suites $(S_{g,n})$ et $(S_{d,n})$ en remarquant que pour les subdivisions proposées, on a : $\forall\ n \geq 1$, $\max\limits_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i) = \frac{b-a}{n}$, et donc que pour : $\varepsilon > 0$, donné, il suffit de prendre : $n_0 = E\left(\frac{b-a}{\alpha}\right)+1$, pour le α obtenu dans la démonstration précédente pour que :

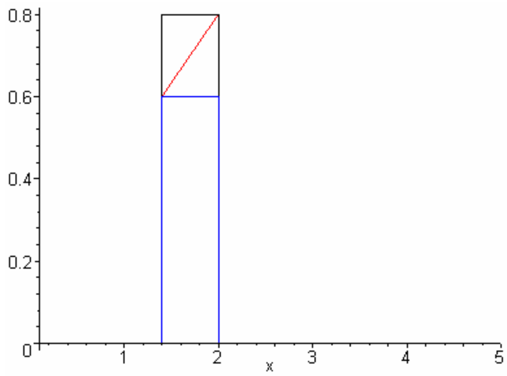
$$\forall\ n \geq n_0,\ \left|S_{g,n} - \int_a^b f(t).dt\right| \leq \varepsilon, \text{ ainsi que : } \left|S_{d,n} - \int_a^b f(t).dt\right| \leq \varepsilon.$$

Puis, les deux suites convergeant vers l'intégrale, la suite des moyennes (c'est-à-dire $(S_{t,n})$) converge aussi vers l'intégrale.

Enfin, lorsque l'on calcule la moyenne de $S_{g,n}$ et de $S_{d,n}$, on obtient une demi-somme de surfaces de rectangles (les rectangles « inférieurs » et les rectangles « supérieurs »).

On obtient donc pour chaque couple de rectangles, la surface commune aux deux termes (soit la surface du rectangle dessiné ici en bleu) à laquelle il faut ajouter la moitié de la surface du rectangle situé au-dessus (dessiné ici en noir), qui est égale à la surface du triangle rouge.

Cela revient en remplacer la fonction sur l'intervalle $[a_k,a_{k+1}]$ par une fonction affine.



3. Primitives d'une fonction réelle ou vectorielle de variable réelle (Sup).

Définition 3.1 : primitive sur un intervalle d'une fonction réelle de variable réelle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f continue de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et : F' = f.

Si f est continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est continue de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe C^1 sur tous les sous-intervalles de I où f est continue, et si sur ces sous-intervalles, on a : F' = f.

Théorème 3.1 : liens entre les différentes primitives d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si F et G sont de primitives de f sur I, alors : $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, F = G + α.

Démonstration :

Distinguons les cas où f est continue ou continue par morceaux sur I.

• si f est continue et si F et G sont des primitives de f sur I, alors : (F – G)' = f – f = 0, sur I, et avec le théorème des accroissements finis, on en déduit que (F – G) est constante sur I.

• si f est continue par morceaux, alors sur chaque sous-intervalle de I où f est continue, (F – G) est constante, en utilisant l'argument précédent.

Puis en un point a de discontinuité de f qui n'est pas une extrémité de l'intervalle I, (F – G) est constante sur un intervalle à gauche de a à la valeur C, et à la valeur C' sur un intervalle à droite de a.

Mais comme (F – G) est continue en a, on a : (F – G)(a) = C = C'.

Finalement, (F – G) est constante sur I.

Théorème 3.2 : unique primitive s'annulant en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et : $a \in I$.

Soit f continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors la fonction définie par : $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t).dt$, est **la** (ou **l'unique)** primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration :

Si f est continue par morceaux sur I, la fonction proposée est bien définie sur I et s'annule en a.

Montrons maintenant qu'elle est continue sur I, dérivable (aux points où f est continue) sur I, de dérivée égale à f.

• elle est continue sur I.

Soit pour cela : $x_0 \in I$, et J un segment de type $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ inclus dans I contenant x_0, avec : $\alpha > 0$.

Alors : $\forall x \in I$, $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_x^{x_0} f(t).dt\right| \leq |x - x_0|.\sup_J |f|$.

La fonction f est bornée sur J puisque J est un segment et f est au moins continue par morceaux sur J.

On en déduit bien que : $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, et F est continue en x_0.

On peut remarquer que la démonstration s'adapte (on adapte J) si x_0 est une extrémité de I.

• soit x_0 un point où f est continue.

Montrons que F est dérivable en x_0.

Pour cela : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, (|t - x_0| \leq \eta) \Rightarrow (|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$.

Donc : $\forall x \in I, (0 < |x - x_0| \leq \eta) \Rightarrow (\forall t \in [x_0, x]$ ou $[x, x_0], |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$, et :

$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0).f(x_0)| = \left|\int_x^{x_0} [f(t) - f(x_0)].dt\right| \leq |x - x_0|.\varepsilon$, ou encore : $\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$.

On vient d'établir que : $\lim_{x \to x_0}\left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}\right) = f(x_0)$, ou que F est dérivable en x_0 avec : $F'(x_0) = f(x_0)$.

Donc F est continue sur I, dérivable sur I (aux points où f est continue) et de dérivée égale en ces points à la valeur de f.

Puis il est immédiat que : F(a) = 0.

Enfin, si G est une autre primitive de f sur I s'annulant en a, on sait que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $G = F + \alpha$, et la valeur en a donne : $G(a) = F(a) + \alpha$, soit : $\alpha = 0$.

Conclusion : F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Théorème 3.3 : lien primitive-dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f de classe C^1 (ou de classe C^1 par morceaux) de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors : $\forall (a,x) \in I^2$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t).dt$.

En particulier, si f est continue sur I et si F est une primitive de f sur I, alors :

$\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)$.

De plus, pour tout segment [a,b] inclus dans I, on a :

$\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \leq |f(a)| + \int_a^b |f'|$.

Démonstration :

• Soit f de classe C^1 de I dans ℝ ou ℂ.

Si, pour : $x \in I$, on note : $F(x) = f(x) - f(a)$, et : $G(x) = \int_a^x f'(t).dt$, alors F et G sont des primitives de f' sur I s'annulant en a (pour F par calcul, et pour G d'après le théorème 3.2).
Donc elles sont égales sur I.

• Soit f, continue et de classe C^1 par morceaux de I dans ℝ ou ℂ.
Alors pour tout point a de, f' est définie sur tout segment [a,x] (ou [a,x]) avec : $x \in I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si on note g la fonction coïncidant avec f' sur I, et nulle là où f' n'est pas définie, alors :

$\forall (a,x) \in I^2$, $\int_a^x f'(t).dt = \int_a^x g(t).dt$.

La fonction g étant continue par morceaux sur I, la fonction : $x \mapsto \int_a^x g(t).dt$, est à nouveau une primitive de g sur I, s'annulant en a, tout comme : $x \mapsto f(x) - f(a)$, et donc elle coïncident sur I.
On en déduit encore le résultat annoncé.

• Si maintenant f est continue sur I, et F est une primitive de f sur I, alors : F' = f, sur I, et on applique le résultat précédent pour obtenir le résultat annoncé.

• Si [a,b] est un segment inclus dans I, alors :

$\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| - |f(a)| \le \big||f(x)| - |f(a)|\big| \le |f(x) - f(a)| = \left|\int_a^x f'(t).dt\right| \le \int_a^x |f'(t)|.dt \le \int_a^b |f'(t)|.dt$,

d'où le résultat attendu en passant à la borne supérieure de f sur [a,b].

Théorème 3.4 : intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre

Soient I et J des intervalles de ℝ.
Soit f continue de I dans ℝ ou ℂ et u et v de classe C^1 de J dans I.
Alors : h : $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t).dt$, est de classe C^1 sur J, et : $\forall x \in J$, $h'(x) = v'(x).f\circ v(x) - u'(x).f\circ u(x)$.

Démonstration :

Notons F une primitive de f sur I.
Alors : $\forall x \in J$, $h(x) = F\circ v(x) - F\circ u(x)$.
Et comme différence de composées de fonctions de classe C^1, h est de classe C^1 sur J, avec :
$\forall x \in J$, $h'(x) = v'(x).F'(v(x)) - u'(x).F'(u(x)) = v'(x).f(v(x)) - u'(x).f(u(x))$.

Théorème 3.5 : intégration par parties

Soit I un intervalle de ℝ, f et g des fonctions de classe C^1 de I dans ℝ ou ℂ.
Alors : $\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b (f.g') = [f.g]_a^b - \int_a^b (f'.g)$.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que : $\forall x \in [a,b]$, $[f.g]'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$, et d'intégrer sur [a,b].

Théorème 3.6 : changement de variable

Soit I un intervalle de ℝ, $[\alpha,\beta]$ un segment de ℝ.
Soit f continue de I dans ℝ ou ℂ, et φ de classe C^1 de $[\alpha,\beta]$ dans I.
Alors : $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t).dt = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u).\varphi'(u).du$.
Si f est continue par morceaux de I dans ℝ ou ℂ et φ est de classe C^1, strictement croissante de $[\alpha,\beta]$ dans I, la formule précédente reste valable.

Démonstration :

Commençons par remarquer que, si on note : $F(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(t).dt$, cette fonction F est définie sur $[\alpha,\beta]$.
Puis, comme intégrale dont les bornes dépendent de x, F est continue et de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$, puisque f est de classe C^1 de I dans ℝ ou ℂ, et φ est de classe C^1 de $[\alpha,\beta]$ dans I.
On a de plus : $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $F'(x) = \varphi'(x).f(\varphi(x))$.
Comme par ailleurs : $F(\alpha) = 0$, F apparaît comme la primitive de $\varphi'.f\circ\varphi$ sur $[\alpha,\beta]$ qui s'annule en α, et à

ce titre, d'après le théorème 3.2, on a : $\forall$ x $\in$ [α,β], F(x) = $\int_{\alpha}^{x} f \circ \varphi(u).\varphi'(u).du$.

Il ne reste plus qu'à appliquer ce résultat pour : x = β, pour obtenir le résultat annoncé.
Pour le second point, la stricte croissance de φ garantit que la fonction foφ.φ' est continue par morceaux sur [α,β], et on peut alors interpréter à nouveau la fonction F précédente comme la primitive de cette fonction sur [α,β] s'annulant en α.

4. Intégrale impropre convergente d'une fonction à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle.

Définition 4.1 : intégrale impropre (ou généralisée) convergente, reste, intégrale divergente (borne supérieure de l'intervalle)

Soit : [a,b[$\subset \mathbb{R}$, avec : b $\in \mathbb{R}$, ou : b = +∞.

Soit f une fonction continue par morceaux de [a,b[dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et : $\forall$ x $\in$ [a,b[, F(x) = $\int_a^x f(t).dt$.

On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée en sa borne supérieure) $\int_a^b f(t).dt$ est convergente (ou converge) lorsque la fonction F admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures.

On pose alors : $\int_a^b f(t).dt = \lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t).dt = \lim\limits_{x\to b} F(x)$.

On appelle alors « reste de l'intégrale impropre convergente » la fonction : x $\mapsto$ $\int_a^b f(t).dt - \int_a^x f(t).dt$, que l'on note parfois : $\int_x^b f(t).dt$, et cette fonction tend vers 0 lorsque x tend vers b.

Lorsque la fonction F n'admet pas de limite finie en b par valeurs inférieures, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est divergente (ou diverge).

Théorème 4.1 : indépendance de convergence par rapport à la borne inférieure de l'intégrale

Soit : [a,b[$\subset \mathbb{R}$, avec : b $\in \mathbb{R}$, ou : b = +∞.
Soit f une fonction continue par morceaux de [a,b[dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est convergente si et seulement si n'importe quelle primitive de f sur [a,b[admet une limite quand x tend vers b par valeurs inférieures, ou de manière équivalente si : $\forall$ c $\in$ [a,b[, la fonction : x $\mapsto$ $\int_c^x f(t).dt$, admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures.

En cas de convergence, si F est une primitive de f sur [a,b[, on a alors : $\int_a^b f(t).dt = \lim\limits_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Démonstration :

Soit F définie par : $\forall$ x $\in$ [a,b[, F(x) = $\int_a^x f(t).dt$, et soit G une autre primitive de f sur [a,b[.

On sait alors que : $\exists$ α $\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall$ x $\in$ [a,b[, G(x) = F(x) + α, puisqu'on travaille sur un intervalle.
Il est clair alors que F admet une limite finie en b si et seulement si G en admet une, et dans ce cas :

$\int_a^b f(t).dt = \lim\limits_{x\to b} F(x) = \lim\limits_{x\to b} G(x) - \alpha$, et comme : G(a) = F(a) + α = α, on en déduit :

$$\int_a^b f(t).dt = \lim\limits_{x\to b} G(x) - G(a) .$$

De plus, étant donné que pour : c $\in$ [a,b[, la fonction : x $\mapsto$ $\int_c^x f(t).dt$, est une primitive particulière de f sur [a,b[, la deuxième équivalence annoncée s'en déduit.

Définition 4.2 : intégrale impropre convergente, divergente (borne inférieure de l'intervalle)

Soit :]a,b] $\subset \mathbb{R}$, avec : a $\in \mathbb{R}$, ou : a = - ∞.

Soit f une fonction continue par morceaux de]a,b] dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et : $\forall$ x $\in$]a,b], F(x) = $\int_x^b f(t).dt$.

On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée en sa borne inférieure) $\int_a^b f(t).dt$ est convergente (ou converge) lorsque la fonction F admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.

On pose alors : $\int_a^b f(t).dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t).dt = \lim_{x \to a} F(x)$.
Lorsque la fonction F n'admet pas de limite finie en a par valeurs supérieures, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est divergente (ou diverge).

Théorème 4.2 : indépendance de convergence par rapport à la borne supérieure de l'intégrale

Soit : $]a,b] \subset \mathbb{R}$, avec : $a \in \mathbb{R}$, ou : $a = -\infty$.
Soit f une fonction continue par morceaux de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est convergente si et seulement si n'importe quelle primitive de f sur $]a,b]$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures, ou de manière équivalente si :
$\forall c \in]a,b]$, la fonction : $x \mapsto \int_x^c f(t).dt$, admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures.
En cas de convergence, si F est une primitive de f sur $]a,b]$, on a alors : $\int_a^b f(t).dt = F(b) - \lim_{x \to a} F(x)$.

Démonstration :

La démonstration est évidemment totalement identique à celle du théorème précédent.

Définition 4.3 : intégrale deux fois impropre (ou généralisée) convergente, divergente

Soit : $]a,b[\subset \mathbb{R}$, avec : $a \in \mathbb{R}$, ou : $a = -\infty$, et : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$, et soit : $c \in]a,b[$.
Soit f continue par morceaux de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) $\int_a^b f(t).dt$ est convergente lorsque les intégrales $\int_a^c f(t).dt$ et $\int_c^b f(t).dt$ sont convergentes.
On pose alors : $\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt$.
Si l'une des deux intégrales précédentes diverge, on dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est divergente.

Théorème 4.3 : indépendance de convergence par rapport à la valeur intermédiaire

Soit : $]a,b[\subset \mathbb{R}$, avec : $a \in \mathbb{R}$, ou : $a = -\infty$, et : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$.
Soit f continue par morceaux de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'intégrale impropre $\int_a^b f(t).dt$ est convergente si et seulement si pour tout : $(c,d) \in]a,b[^2$, les intégrales $\int_a^c f(t).dt$ et $\int_d^b f(t).dt$ sont convergentes, ou de manière équivalente, si n'importe quelle primitive de f sur $]a,b[$ admet une limite finie en a par valeurs supérieures et en b par valeurs inférieures.
Si F désigne une primitive de f sur $]a,b[$, on a alors : $\int_a^b f(t).dt = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$.

Démonstration :

Notons F une primitive de f sur $]a,b[$.
Alors la convergence de $\int_a^c f(t).dt$ ne dépend pas de la valeur c, mais uniquement du fait que F admet ou pas une limite finie en a.
De même, $\int_d^b f(t).dt$ converge si et seulement si F admet une limite finie en b (sans se préoccuper de la valeur d), et on en déduit ainsi les équivalences.
Puis, en cas de convergence des deux intégrales, on a pour tout c dans $]a,b[$:

$$\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt = [F(c) - \lim_{x \to a} F(x)] + [\lim_{x \to b} F(x) - F(c)] = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x).$$

Théorème 4.4 : cas d'une fonction prolongeable par continuité en une borne réelle de l'intervalle

Soit : $[a,b[\subset \mathbb{R}$, avec : $b \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue par morceaux de [a,b[dans ℝ ou ℂ.

Si f se prolonge par continuité en b, l'intégrale $\int_a^b f(t).dt$ est convergente, et coïncide avec l'intégrale sur le segment [a,b] de la fonction prolongée en b à partir de f.

Le résultat est le même dans le cas d'un intervalle]a,b], avec : a ∈ ℝ, et une fonction f, continue par morceaux de]a,b] dans ℝ ou ℂ, prolongeable par continuité en a.

Démonstration :

Supposons donc f prolongeable par continuité en b et notons f_0 la fonction prolongée en b à partir de f.

La fonction f_0 est alors continue par morceaux sur [a,b], et toute primitive F de f_0 sur [a,b] est encore une primitive de f sur [a,b[.

Dans ce cas F est par définition continue en b et y admet donc une limite finie.

Mais F étant aussi une primitive de f sur [a,b[, on en déduit que l'intégrale $\int_a^b f(t).dt$ est convergente, puis que : $\int_a^b f_0(t).dt = F(b) - F(a) = \lim_{x \to b} F(x) - F(a) = \int_a^b f(t).dt$.

Théorème 4.5 : exemples classiques dont les intégrales de Riemann

Les intégrales suivantes convergent dans les cas précisés :

- intégrales de Riemann : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (avec : α ∈ ℝ) converge si et seulement si : α > 1.
- l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ (avec : α ∈ ℝ) converge si et seulement si : α < 1.
- l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ (avec : α ∈ ℝ, (a,b) ∈ $\mathbb{R}^2$, a < b) converge si et seulement si : α < 1.
- l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ (avec : α ∈ ℝ, (a,b) ∈ $\mathbb{R}^2$, a < b) converge si et seulement si : α < 1.
- l'intégrale $\int_0^1 \ln(t).dt$ converge.
- l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha.t}.dt$ converge (avec : α ∈ ℝ), si et seulement si : α > 0.

Démonstration :

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$:

Pour : α = 1, on a : ∀ x > 1, $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$, et cette fonction n'a pas de limite finie en +∞.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

Pour : α ≠ 1, on a : ∀ x > 1, $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1}.[t^{-\alpha+1}]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}.\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$, et cette expression a une limite finie en +∞ si et seulement si : α – 1 > 0, soit : α > 1.

Dans ce dernier cas, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.

- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$:

De la même façon l'intégrale diverge pour : α = 1, puisqu'une primitive (à nouveau ln) n'a pas de limite finie en 0.

Puis, pour : α ≠ 1, la primitive précédente a une limite finie cette fois si et seulement si : α– 1 < 0, soit : α < 1, et dans ce cas, l'intégrale vaut $\frac{1}{1-\alpha}$.

- $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$:

On utilise à nouveau une primitive sur]a,b]de la fonction sous l'intégrale, par exemple :

pour : $\alpha = 1$, $\forall x \in]a,b]$, $F(x) = \ln(x - a)$, qui n'a pas de limite finie en a.

pour : $\alpha \neq 1$, $\forall x \in]a,b]$, $F(x) = \frac{1}{-\alpha+1}.(x-a)^{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha}.(x-a)^{1-\alpha}$, qui a une limite finie en a si et seulement si : $1 - \alpha > 0$, soit : $\alpha < 1$.

- $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$:

Un raisonnement strictement identique donne le même résultat.

- $\int_0^1 \ln(t).dt$:

On peut obtenir une primitive sur]0,1] de la fonction sous l'intégrale par intégration par parties :

$\forall x > 0$, $F(x) = \int_1^x \ln(t).dt = [t.\ln(t)]_1^x - \int_1^x t.\frac{1}{t}.dt = x.\ln(x) - x + 1$, (ou tout autre fonction égale à celle-ci à une constante près) et une telle primitive admet toujours une limite finie en 0 (ici la limite vaut 1).

Donc l'intégrale est convergente, et en particulier : $\int_0^1 \ln(t).dt = F(1) - \lim_{x\to 0} F(x) = 0 - 1 = -1$.

- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha.t}.dt$:

Pour : $\alpha = 0$, on peut proposer comme primitive sur $[0,+\infty)$ de la fonction sous l'intégrale :

$\forall x > 0$, $\int_0^x e^{-\alpha.t}.dt = \int_0^x dt = x$, qui n'a pas de limite finie en $+\infty$ et l'intégrale diverge.

Pour : $\alpha \neq 0$, de même : $\forall x > 0$, $\int_0^x e^{-\alpha.t}.dt = \frac{1}{-\alpha}.[e^{-\alpha.t}]_0^x = -\frac{1}{\alpha}.[e^{-\alpha.x} - 1]$, et cette dernière fonction admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si : $\alpha > 0$, (ou : $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, si : $\alpha \in \mathbb{C}$).

Théorème 4.6 : linéarité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont l'intégrale sur I est convergente et soit : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$.
Alors l'intégrale sur I de $(\lambda.f + \mu.g)$ est convergente.

Démonstration :

Supposons I de la forme [a,b[.
Alors si f et g ont des intégrales convergentes sur I, notons F et G des primitives de ces fonctions sur I.
Dans ce cas, $[\lambda.F + \mu.G]$ est une primitive de $(\lambda.f + \mu.g)$ sur I, et elle admet une limite finie en b.
Donc $\int_I (\lambda.f(t) + \mu.g(t)).dt$ converge.
Un argument identique s'applique dans le cas où I est du type]a,b].
Enfin, si I est de type]a,b[, il suffit de couper l'intervalle en]a,c] et [c,b[et d'appliquer les résultats précédents.

5. Cas des fonctions à valeurs réelles positives.

Théorème 5.1 : utilisation de majoration et de minoration d'une primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$, positive, et F une primitive de f sur I.
Si : I = [a,b[, avec : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$, f est intégrable sur I si et seulement si F est majorée sur I.
Si : I =]a,b], avec : $a \in \mathbb{R}$, ou : $a = -\infty$, f est intégrable sur I si et seulement si F est minorée sur I.
Si : I =]a,b[, avec : ($a \in \mathbb{R}$, ou : $a = -\infty$) et ($b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$), f est intégrable sur I si et seulement si F est bornée sur I.

Démonstration :

Notons F une primitive de f sur I.
Puisque f est à valeurs positives, F est croissante sur I.
Si I est du type [a,b[, F admet une limite finie en b si et seulement si elle est majorée sur I.
Notons que dans ce cas, F est minorée sur I puisqu'elle admet une valeur en a.
De même, si I est du type]a,b], F admet une limite en a si et seulement si elle est minorée sur I.
De même dans ce cas, F est majorée sur I puisqu'elle admet de la même façon une valeur en b.

Pour des raisons similaires, on en déduit la troisième équivalence dans le cas où I est de type]a,b[.

Théorème 5.2 : utilisation d'une fonction majorante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient f et g continues par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, telles que : $0 \le f \le g$.
Si l'intégrale $\int_I g(t).dt$ est convergente, l'intégrale $\int_I f(t).dt$ l'est aussi et on a alors : $\int_I f(t).dt \le \int_I g(t).dt$.
De même, si l'intégrale $\int_I f(t).dt$ diverge, alors $\int_I g(t).dt$ aussi.

Démonstration :

Soit : $c \in I$.
Notons : $\forall x \in I$, $F(x) = \int_c^x f(t).dt$, et : $G(x) = \int_c^x g(t).dt$.
Si I est de type [a,b[, on choisit : c = a, et : $\forall x \ge a$, $F(x) \le G(x)$.
Puisque f et g sont positives sur I, F et G sont croissantes sur I, donc si l'intégrale $\int_a^b g(t).dt$ est convergente, alors G admet une limite en b donc est majorée sur I et F aussi.
On en déduit alors que F admet une limite finie en b, donc que $\int_a^b f(t).dt$ converge.
Dans ce cas, de plus : $\int_a^b f(t).dt = \lim\limits_{x\to b} F(x) \le \lim\limits_{x\to b} G(x) = \int_a^b g(t).dt$.
Si I est de type]a,b], on choisit : c = b, et : $\forall x \le b$, $G(x) \le F(x)$, puisque les bornes dans les intégrales sont inversées.
Puis si l'intégrale $\int_a^b g(t).dt$ est convergente, alors : $x \mapsto \int_x^b g(t).dt = -G(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a, et (– G) étant décroissante sur I, elle est donc majorée sur I, donc G est minorée sur I.
F dans ce cas est donc aussi minorée, et en reprenant le même raisonnement que pour G, l'intégrale $\int_a^b f(t).dt$ converge. De plus :

$$\int_a^b f(t).dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t).dt = -\lim_{x\to a} F(x) \le -\lim_{x\to a} G(x) = \lim_{x\to a} \int_x^b g(t).dt = \int_a^b g(t).dt$$

Enfin, le dernier cas (I =]a,b[) rassemble les deux études que l'on vient de faire.
Les cas de divergences traduisent simplement l'implication contraposée de celle que l'on vient d'établir.

Théorème 5.3 : utilisation d'une fonction équivalente

Soit : I = [a,b[, un intervalle de $\mathbb{R}$, avec : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$.
Soient f et g sont continues par morceaux sur I à **valeurs réelles positives**.
Si f et g sont équivalentes en b, alors :

($\int_I f(t).dt$ est convergente) $\Leftrightarrow$ ($\int_I g(t).dt$ convergente).

Le même résultat est valable dans le cas d'un intervalle]a,b], avec f et g équivalentes en a.

Démonstration :

Si f et g sont équivalentes en b, alors on peut écrire f sous la forme : $\forall t \in I$, $f(t) = g(t).(1 + \varepsilon(t))$, où ε est une fonction définie sur I qui tend vers 0 quand t tend vers b.
Puis, on peut garantir alors qu'il existe un voisinage V de b (de type [c,b[, si b est réel, ou [c,+∞) si b est infini), sur lequel on a : $\forall t \in [c,b[$, $-1/2 \le \varepsilon(t) \le 1/2$, puis : $1/2 \le (1 + \varepsilon(t)) \le 3/2$.
D'où : $\forall t \in [c,b[$, $1/2.g(t) \le f(t) \le 3/2.g(t)$.
On peut alors en déduire que :

($\int_I g(t).dt$ converge) $\Rightarrow$ ($\int_I \frac{3}{2}.g(t).dt$ converge) $\Rightarrow$ ($\int_I f(t).dt$ converge),

et l'implication réciproque s'obtient de la même façon à partir de la première inégalité entre 1/2.g et f.
Le cas où l'intervalle est de type]a,b], avec f et g équivalentes en a se traite de la même façon.

6. Intégrale absolument convergente, semi-convergente, fonction intégrable sur un intervalle.

Définition 6.1 : intégrale absolument convergente, fonction intégrable sur I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que f a une intégrale absolument convergente sur I ou qu'elle est intégrable sur I (ou que $\int_I f(t).dt$ est absolument convergente) si et seulement si l'intégrale $\int_I |f(t)|.dt$ est convergente.

Théorème 6.1 : utilisation d'une majoration sur tout segment

Soit I un intervalle de ℝ.
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans ℝ ou ℂ.
Alors f est intégrable sur I si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout segment J inclus dans I, on a : $\int_J |f(t)|.dt \le M$.

Démonstration :

Si f est intégrable sur I alors notons F une primitive de |f| sur I.
Puisque $\int_I |f(t)|.dt$ converge, F est bornée sur I (th. 2.1) par un réel A.
Soit alors J un segment quelconque inclus dans I de type : J = [α,β].
Alors : $\int_J |f(t)|.dt = F(\beta) - F(\alpha) \le 2.A$, et : M = 2.A, répond au problème.
Réciproquement, si on peut trouver M tel que, pour tout segment J inclus dans I, on a : $\int_J |f(t)|.dt \le M$,
soit : c ∈ I, et notons : ∀ x ∈ I, F(x) = $\left|\int_c^x |f(t).dt\right|$.
Alors : ∀ x ∈ I, (x ≥ c) ⇒ (0 ≤ F(x) ≤ M), et : (x ≤ c) ⇒ (|F(x)| = -F(x) = $\left|\int_x^c |f(t).dt\right|$ ≤ M),
autrement dit, F est bornée sur I et $\int_I |f(t)|.dt$ converge.

Théorème 6.2 : lien entre intégrale absolument convergente et intégrale convergente

Soit I un intervalle de ℝ.
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans ℝ ou ℂ.
Si $\int_I |f(t)|.dt$ est convergente alors $\int_I f(t).dt$ converge aussi.
De plus : $\left|\int_I f(t).dt\right| \le \int_I |f(t)|.dt$.

Démonstration :

- cas où f est à valeurs réelles.

On peut écrire : f = |f| – (|f| – f), les fonctions |f| et (|f| – f) étant continues par morceaux de I dans ℝ.
La fonction |f| est intégrable sur I et son intégrale sur I converge.
De plus, la fonction (|f| – f) est positive sur I, majorée par |f| sur I, donc son intégrale sur I converge.
Comme différence de deux fonctions d'intégrale sur I convergente, f est encore d'intégrale convergente sur I ou intégrable sur I.
Enfin, (|f| – f) et (|f| + f) sont positives sur I donc d'intégrales sur I positives, soit :
$0 \le \int_I (|f| - f) = \int_I |f| - \int_I f$, et : $0 \le \int_I (|f| + f) = \int_I |f| + \int_I f$, d'où : $-\int_I |f| \le \int_I f \le \int_I |f|$, et : $\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$.

- cas où f est à valeurs complexes.

On peut cette fois écrire : f = Re(f) + i.Im(f).
Puis : 0 ≤ |Re(f)| ≤ |f|, et : 0 ≤ |Im(f)| ≤ |f|, à l'aide de : ∀ (α,β) ∈ ℝ², |α| ≤ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.
Donc les fonctions (à valeurs réelles) Re(f) et Im(f) sont intégrables sur I, et $\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\int_I \mathrm{Im}(f)$ convergent d'après ce qui précède.
Finalement $\int_I f(t).dt$ converge aussi par combinaison linéaire.
Enfin, pour un segment : J = [α,β] ⊂ I, on a : $\left|\int_\alpha^\beta f(t).dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(t)|.dt$, et donc en faisant tendre maintenant α vers a et β vers b (ou en prenant si a ou b sont dans I : α = a, ou : β = b), on en déduit par passage à la limite dans l'inégalité précédente que : $\left|\int_I f(t).dt\right| \le \int_I |f(t)|.dt$.

Définition 6.2 : intégrale semi-convergente

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Lorsque $\int_I |f(t)|.dt$ est une intégrale divergente et $\int_a^b f(t).dt$ est une intégrale convergente, on dit alors que $\int_a^b f(t).dt$ est semi-convergente.

Théorème 6.3 : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ est semi-convergente.

Démonstration :

• l'intégrale est convergente.
Notons pour cela f la fonction sous l'intégrale (qui est deux fois généralisée).
Alors f est prolongeable par continuité en 0 (comme le montre un développement limité du sinus) et donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ est convergente.

Puis : $\forall$ x $\geq \pi$, $\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t}.dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^2}.dt = -\frac{\cos(x)+1}{x} - \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^2}.dt$.

Or dans cette dernière expression, la partie intégrée a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et la nouvelle intégrale qui apparaît est absolument convergente puisque : $\forall$ t $\geq \pi$, $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$,

et la fonction majorante est bien intégrable sur $[\pi,+\infty)$.

Donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ aussi.

• l'intégrale n'est pas absolument convergente.

Pour cela soit : n $\in \mathbb{N}^*$, et : $I_n = \int_{n.\pi}^{(n+1).\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt$.

On peut effectuer dans l'intégrale le changement de variable : u = t – n.π, pour obtenir :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+n.\pi)|}{u+n.\pi}.du = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n.\pi}.du \geq \frac{1}{n.\pi}.\int_0^{\pi} \sin(u).dt = \frac{2}{n.\pi}$.

Mais alors, en notant F une primitive sur $[\pi,+\infty)$ de : $x \mapsto \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$, on constate que :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $F(n+1) = \int_\pi^{(n+1).\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt = \sum_{k=1}^{n} I_k \geq \frac{2}{\pi}.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Puisque la série harmonique diverge vers $+\infty$, on en déduit que (F(n+1)) tend aussi vers $+\infty$.

Mais F est de plus croissante donc F tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt$ diverge, comme $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt$.

Théorème 6.4 : cas d'une fonction admettant une limite en +∞

Soit f définie, continue par morceaux de $[a,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si f admet une limite finie L en $+\infty$, **et si** : L $\neq$ 0, alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty)$.
Il est donc **nécessaire**, **si f admet une limite finie en +∞,** que cette limite soit nulle pour f puisse être intégrable sur $[a,+\infty)$.

Démonstration :

Supposons donc que f tende vers L en $+\infty$ et que (quitte à remplacer f par – f) : L > 0.
Alors : $\exists$ A $\in \mathbb{R}$, $\forall$ x $\geq$ A, f(x) $\geq$ L/2.
Or la fonction constante égale à L/2 n'est pas intégrable sur $[A,+\infty)$, et f, comme fonction positive sur $[A,+\infty)$, minorée par une autre fonction positive dont l'intégrale sur $[A,+\infty)$ diverge, a également une

intégrale sur $[A, +\infty)$ divergente, donc l'intégrale de f sur $[a, +\infty)$ est également divergente.

Théorème 6.5 : utilisation d'une fonction majorante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient f et φ des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que : $|f| \leq \varphi$.

Si φ intégrable sur I, alors f est intégrable sur I (ou $\int_a^b f(t).dt$ est absolument convergente).

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème 5.2 à $|f|$ et φ, qui sont bien des fonctions positives sur I.

Théorème 6.6 : linéarité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) intégrables sur I et : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$).

Alors $(\lambda.f + \mu.g)$ est intégrable sur I, et : $\int_I (\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\int_I f + \mu.\int_I g$.

Démonstration :

On peut remarquer que : $|\lambda.f + \mu.g| \leq |\lambda|.|f| + |\mu|.|g|$.

La fonction majorante est une combinaison linéaire de fonctions dont l'intégrale sur I converge.

Donc l'intégrale sur I de $(\lambda.f + \mu.g)$ converge et cette fonction est bien intégrable sur I.

Pour ensuite un intervalle I de type : $I = [a,b[$, on a : $\forall x \geq a$, $\int_a^x (\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\int_a^x .f + \mu.\int_a^x g$, il suffit alors de faire tendre x vers b pour avoir le résultat attendu.

Si I est de type $]a,b]$, la démonstration est la même et pour I de type $]a,b[$, on combine les deux résultats.

Théorème 6.7 : relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (avec éventuellement : $a = -\infty$, $b = +\infty$), et : $a < c < b$.

Soit f une fonction définie, continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, intégrable sur I.

Alors f est intégrable sur $(a,c]$ et $[c,b)$ et : $\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt$.

Démonstration :

Soit F_+ la primitive de $|f|$ sur I qui s'annule en c : $\forall x \in I$, $F_+(x) = \int_c^x |f(t)|.dt$, et : $F(x) = \int_c^x f(t).dt$.

Puisque f est intégrable sur I, F_+ est bornée sur I.

Donc F_+ (qui est aussi une primitive de $|f|$ sur $(a,c]$ et $[c,b)$) est bornée sur $(a,c]$ et $[c,b)$ et f est intégrable sur $(a,c]$ et $[c,b)$.

Puis : $\int_c^b f(t).dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(c)$, et : $\int_a^c f(t).dt = F(c) - \lim_{x\to a} F(x)$, d'où la relation de Chasles.

Remarque : ce théorème peut aussi être formulé de la façon suivante :

« Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cup J$ soit un intervalle, et $I \cap J$ soit vide ou réduit à un point.

Soit f une fonction définie, continue par morceaux de $I \cup J$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, intégrable sur I et sur J.

Alors f est intégrable sur $I \cup J$ et : $\int_{I\cup J} f(t).dt = \int_I f(t).dt + \int_J f(t).dt$ ».

Théorème 6.8 : positivité et croissance de l'intégrale sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si f est continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$, positive et intégrable sur I, alors : $0 \leq \int_I f(t).dt$.
- Soient f et g des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$, intégrables sur I.

Si : $f \leq g$, sur I alors : $\int_I f(t).dt \leq \int_I g(t).dt$.

Démonstration :

- Puisque l'intégrale de f sur tout segment J inclus dans I vérifie : $0 \leq \int_J f(t).dt$, il suffit de faire tendre les bornes de ce segment vers les bornes de I pour obtenir l'inégalité voulue.
- Si maintenant f et g vérifient : $f \leq g$, sur I, alors : $0 \leq g - f$, qui est une fonction intégrable sur I, positive.

En application de ce qu'on vient juste de démontrer, on en déduit que : $0 \leq \int_I [g(t) - f(t)].dt$, d'où le résultat en utilisant la linéarité.

Théorème 6.9 : cas de nullité d'une intégrale de fonction continue et positive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, continue et positive sur I.
Si : $\int_I f = 0$, alors f est nulle sur I.

Démonstration :

Soit J un segment inclus dans I, avec : J = [α,β], et I d'extrémités a et b.
Que I soit contienne ou pas a et b, la relation de Chasles permet d'écrire :

$\int_a^b f(t).dt = \int_a^\alpha f(t).dt + \int_\alpha^\beta f(t).dt + \int_\beta^b f(t).dt$, d'où :

$0 \leq \int_\alpha^\beta f(t).dt = \int_a^b f(t).dt - \int_a^\alpha f(t).dt - \int_\beta^b f(t).dt \leq \int_a^b f(t).dt = 0$, puisque f est positive donc toute intégrale de f (dont les bornes sont dans le bon sens) est positive.

Or on sait que si une fonction est continue et positive sur un segment et d'intégrale nulle, alors la fonction est nulle.
Conclusion : f est nulle sur tout segment inclus dans I donc sur I.

7. Critères d'intégrabilité, opérations sur les fonctions intégrables sur un intervalle.

Théorème 7.1 : utilisation d'une fonction équivalente

Soit [a,b[un intervalle de $\mathbb{R}$, avec : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$.
Soient f et g continues par morceaux de : I = [a,b[dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que : $|f| \underset{b}{\sim} |g|$.

Si g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I (ou $\int_a^b f(t).dt$ est absolument convergente).

Démonstration :

Le fait que |f| et |g| sont équivalentes en b s'écrit aussi :
$\forall t \in [a,b[$, $|f(t)| = |g(t)|.(1 + \varepsilon(t))$, où ε tend vers 0 quand t tend vers b.

Donc pour la valeur $\frac{1}{2}$, on peut trouver un voisinage [β,b[de b dans I où on a : $\forall t \in [\beta,b[$, $|\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}$.

D'où : $\forall t \in [\beta,b[$, $\frac{1}{2}.|g(t)| \leq |f(t)| \leq \frac{3}{2}.|g(t)|$, et le théorème 6.5 permet de conclure.

Le résultat bien entendu s'adapte au cas où l'équivalence de fonctions est en la borne inférieure de I.

Théorème 7.2 : utilisation d'un « petit o »

Soit [a,b[un intervalle de $\mathbb{R}$, avec : $b \in \mathbb{R}$, ou : $b = +\infty$.
Soient f et g deux fonctions définies sur [a,b[, continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si : f = o(g) en b, et si g est intégrable sur [a,b[, alors f l'est aussi.

Démonstration :

Là encore, on réécrit le petit o en : $\forall t \in [a,b[$, $f(t) = g(t).\varepsilon(t)$, avec ε qui tend vers 0 quand t tend vers b.
Puis, pour la valeur 1, on peut trouver à nouveau un voisinage [β,b[de b dans I où : $\forall t \in [\beta,b[$, $|\varepsilon(t)| \leq 1$.
Soit finalement : $\forall t \in [\beta,b[$, $|f(t)| \leq |g(t)|$, et à nouveau, le théorème 6.5 permet de conclure.
Le résultat s'adapte également au cas l'hypothèse est vérifiée en la borne inférieure de I.

Théorème 7.3 : comparaison avec une fonction puissance

- En $+\infty$: soit f une fonction définie sur $[a,+\infty)$, continue par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si : $\exists \alpha > 1$, tel que $[x^\alpha.f(x)]$ tend vers 0 en $+\infty$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty)$.
- En 0 : soit f une fonction définie sur]0,a], continue par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si : $\exists \alpha < 1$, tel que : $[x^\alpha.f(x)]$ tend vers 0 en 0, alors f est intégrable sur]0,a].

Démonstration :

- En $+\infty$: il suffit de dire que dans ce cas, on a : $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, en $+\infty$, et d'appliquer le théorème 7.2 en remarquant de plus que l'hypothèse : $\alpha > 1$, garantit l'intégrabilité de : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, sur $[a,+\infty) \cap [1,+\infty)$.

• En 0 : c'est le même type de raisonnement.

Théorème 7.4 : (hors programme) intégrales de Bertrand

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}}$ (avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$) converge si et seulement si :

$(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$, et : $\beta > 1)$.

Démonstration :

Notons tout d'abord que toutes les fonctions qui interviennent sont positives sur $[2,+\infty)$.

Pour : $\alpha = 1$, on peut facilement trouver une primitive puisqu'apparaît alors la dérivée de ln :

• pour : $\beta = 1$, $\forall$ x > 2, $\int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}} = \int_2^x \frac{dt}{t.(\ln(t))} = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$, qui n'a pas de limite finie en $+\infty$.

• pour : $\beta \neq 1$, $\forall$ x > 2,

$$\int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}} = \int_2^x \frac{dt}{t.(\ln(t))^{\beta}} = \left[\frac{1}{-\beta+1}.(\ln(t))^{-\beta+1}\right]_2^x = \frac{1}{1-\beta}[(\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}],$$

qui a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :$1 - \beta < 0$, soit : $\beta > 1$.

Pour : $\alpha \neq 1$, distinguons deux cas :

• pour : $\alpha > 1$, soit : $1 < \gamma < \alpha$.

Alors : $t^{\gamma}.\frac{1}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln(t))^{\beta}}$, et cette fonction tend vers 0 en $+\infty$ puisque d'après le théorème des croissances comparées, « la puissance l'emporte sur le logarithme » et : $\gamma - \alpha < 0$.

Donc : $\frac{1}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}} = o\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right)$, en $+\infty$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale correspondante.

• pour : $\alpha < 1$, soit cette fois : $\alpha < \gamma < 1$.

Alors : $t^{\gamma}.\frac{1}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln(t))^{\beta}}$, et cette fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$, par le même argument que précédemment.

Donc : $\exists$ A $\in [2,+\infty)$, $\forall$ t > A, $1 \leq \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln(t))^{\beta}}$, et : $\frac{1}{t^{\gamma}} \leq \frac{1}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}}$.

Comme enfin $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$ diverge, on en déduit la divergence dans ce cas de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}.(\ln(t))^{\beta}}$.

Théorème 7.5 : changement de variable

Soient : J = [a,b[, et I des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit φ une bijection de classe C^1 de J sur I et soit f continue (ou continue par morceaux), intégrable, de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec : $\varphi(a) = c$, et : $d = \lim_{x\to b} \varphi(x)$.

Alors $(f\circ\varphi).\varphi'$ est intégrable sur J et : $\int_c^d f(t).dt = \int_a^b (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u).du$.

Plus généralement, si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, φ une bijection de classe C^1 de J sur I et f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a : $\int_I f = \int_J f\circ\varphi.|\varphi'|$.

Démonstration :

Puisque φ est une bijection continue entre deux intervalles, elle est strictement monotone sur J.

Supposons la par exemple croissante, donc : $\varphi' \geq 0$, sur J, avec : J = [c,d[.

Alors si on appelle F la primitive de f sur I définie par : $\forall$ y $\in$ I, F(y) = $\int_c^y f(t).dt$.

La formule d'intégration par parties sur un segment (ici avec [a,x] et $[c,\varphi(x)]$) appliquée à |f| donne :

$\forall$ x $\in$ J, $\int_a^x |(f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)|.du = \int_a^x |(f\circ\varphi)(u)|.\varphi'(u).du = \int_c^{\varphi(x)} |f(t)|.dt$, puisque φ' est positive sur J.

Or l'intégrabilité de $(f\circ\varphi).\varphi'$ sur J est équivalente au fait que l'expression précédente admette une limite finie lorsque x tend vers b, ce qui est le cas puisque f est elle-même intégrable sur I, et : $\lim_{x\to b}\varphi(x)=d$.

De plus, on a aussi : $\forall x \in J$, $\int_a^x (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u).du = \int_c^{\varphi(x)} |f(t)|.dt$, d'où par passage à la limite :

$\int_c^d f(t).dt = \int_a^b (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u).du$, soit bien : $\int_J f o\varphi.|\varphi'| = \int_J f o\varphi.\varphi' = \int_I f$.

Si dans un second temps, on suppose maintenant φ décroissante sur J, alors tous les résultats se conservent en remarquant que : $|\varphi'| = -\varphi'$, et : $J =]d,c]$.

Dans ce cas on a alors : $\int_J (fo\varphi)(u).|\varphi'(u)|.du = -\int_a^b (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u).du = -\int_c^d f(t).dt = \int_d^c f(t).dt = \int_I f(t).dt$.

Si enfin, l'intervalle I est de type]a,b] ou]a,b[, le résultat s'obtient de façon identique.

8. Comparaison série – intégrale.

Théorème 8.1 : cas d'une fonction réelle, décroissante et positive

Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue (ou continue par morceaux), **décroissante** et **positive**.

Soit : $n_0 \in I \cap \mathbb{N}$.

Alors la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t).dt$ sont de même nature et donc convergent ou divergent simultanément.

Démonstration :

Soit : $n > n_0$, et notons : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$.

Alors : $\forall n_0 < k \leq n$, $\forall t \in [k-1,k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$, d'où : $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t).dt \leq f(k-1)$, et :

$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t).dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$, ce qui s'écrit encore : $S_n - f(n_0) \leq \int_{n_0}^{n} f(t).dt \leq S_{n-1}$.

Par ailleurs, la fonction f est à valeurs positives et la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ est également à termes positifs.

• Si maintenant on suppose que la série converge, alors la suite (S_n) est convergente et donc bornée et en particulier : $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geq n_0$, $S_n \leq M$.

Soit alors : $x \geq n_0$ et : $n = E(x) \geq n_0$, sa partie entière.

On constate que : $\int_{n_0}^{x} f(t).dt \leq \int_{n_0}^{E(x)+1} f(t).dt \leq S_{E(x)} \leq M$, puisque f est positive.

Mais alors la fonction positive f est intégrable sur $[n_0,+\infty)$, puisqu'une de ses primitives y est majorée.

• Réciproquement, supposons f (qui est positive) intégrable sur $[n_0,+\infty)$.

Alors : $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in [n_0,+\infty)$, $\int_{n_0}^{x} f(t).dt \leq M$, et : $\forall n > n_0$, $S_n - f(n_0) \leq \int_{n_0}^{n} f(t).dt \leq M$.

Donc : $S_n \leq M + f(n_0)$, inégalité qui reste vraie pour : $n = n_0$.

Donc la suite (croissante) des sommes partielles (S_n) est majorée par M, donc convergente et la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ est également convergente.

Théorème 8.2 : série des reliquats

Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue (ou continue par morceaux), **décroissante** et **positive**.

Soit : $n_0 \in I \cap \mathbb{N}$.

On pose : $\forall n \geq n_0+1$, $w_n = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n)).dt = \left(\int_{n-1}^{n} f(t).dt\right) - f(n)$.

Alors la série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ est convergente.

Démonstration :

Avec les notations précédentes, on peut remarque que la série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ est à termes positifs puisque f est décroissante sur l'intervalle I.
D'autre part, et en reprenant les remarques de la démonstration précédente, on a :
$\forall$ n $\geq$ n_0+1, $w_n \leq f(n-1) - f(n) = a_n$.
Or la série $\sum_{n\geq n_0+1} a_n$ est télescopique et converge car f admet une limite finie en $+\infty$.
En effet, f est décroissante sur I et positive donc minorée.
On conclut que la série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ est également convergente.

Exemple : retour sur la constante d'Euler et le développement asymptotique de H_n

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, f(x) = $\frac{1}{x}$.

Alors cette fonction permet d'établir l'existence de γ, constante d'Euler, telle que :

$\forall$ n $\geq$ 1, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon(n)$, avec : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

Démonstration :

On sait déjà que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ sont de même nature (donc divergentes) puisque f est bien définie de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, et y est continue, décroissante et positive.

De plus la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ est convergente, avec : $\forall$ n $\geq$ 2, $w_n = \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t} - \frac{1}{n}$.

La somme partielle de cette série vaut alors : $\forall$ n $\geq$ 2, $\sum_{k=2}^{n} w_k = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ = ln(n) – H_n + 1.

Si on note W la somme de la série précédente, on a donc : ln(n) – H_n + 1 = W – ε(n), où ε est une suite qui tend vers 0 en $+\infty$, et : H_n = ln(n) + 1 – W + ε(n) = ln(n) + γ + ε(n), où on a noté : γ = 1 – W.