$$\boxed{(1-x)y'+y=\frac{x-1}{x} \quad (E)}$$

$x\longmapsto 1-x$ et $x\longmapsto \frac{x-1}{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$

$x\longmapsto 1-x$ s'annule en 1

1/ Résolution de (E) sur les intervalles I suivants : $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

• L'EDLH1 associée est : $y'+\frac{1}{(1-x)}y=0$ (E_0)

$x\longmapsto 1-x$ est solution évidente non nulle de (E_0)

La solution générale de (E_0) sur I est :

$$x\longmapsto \lambda(1-x)\quad,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$$

• Méthode de variation de la constante

on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 : x\longmapsto (1-x)\lambda(x)$ où $\lambda : I\to\mathbb{R}^*$ dérivable

$\forall x\in I,\ (1-x)y_0'(x)+y_0(x)=(1-x)^2\lambda'(x)$

Donc :

$$\left(\forall x\in I, (1-x)y_0'(x)+y_0(x)=\frac{x-1}{x}\right)\iff\left(\forall x\in I,\ (1-x)^2\lambda'(x)=\frac{x-1}{x}\right)$$
$$\iff\left(\forall x\in I,\ \lambda'(x)=\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

on choisit pour λ une primitive F de $\frac{1}{x(x-1)}$

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$
$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\ln|x-1|-\ln|x|\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$

on choisit $\lambda : x\longmapsto \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

Ainsi $y_0 : x\longmapsto (1-x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ est sol de (E)

• La solution générale de (E) sur I est

$$x\longmapsto \lambda(1-x)+(1-x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$
$$x\longmapsto (1-x)\left(\lambda+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)\quad,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$$

• Résolution de (E) sur $[0;+\infty[$

on procède par analyse/synthèse

a) Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une sol de (E) sur $\mathbb{R}_+$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1-x)g'(x) + g(x) = \frac{x-1}{x}$

Alors, g est sol de (E) sur $]0,1[$ et $]1;+\infty[$

Ainsi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[, \ g(x) = (1-x)\left(\lambda_1 + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$

$$\forall x \in]1;+\infty[, \ g(x) = (1-x)\left(\lambda_2 + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$