Soit $X, Y$ deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire.

Si pour toute suite bornée $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut trouver une extractrice $\varphi$ telle que $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ rend la suite $(Tx_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente alors $T$ est compact.

<u>Preuve</u> :

En particulier, pour $(x_k) \subset \overline{B}_X$, on a l'existence de $\varphi$ telle que $(Tx_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément limite contenu dans l'adhérence $\overline{T(\overline{B}_X)}$ ; laquelle, dans un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité [a], est définie comme $\{y|\ \exists (y_k) \subset T(\overline{B}_X) : y_k \to y\}$.

Pour une suite $(y_k) \subset \overline{T(\overline{B}_X)}$ on peut affirmer l'existence d'une extractice $\varphi$ telle que :

1. Soit $(y_{\varphi(k)}) \subset T(\overline{B}_X)$,
2. Soit $(y_{\varphi(k)}) \subset \overline{T(\overline{B}_X)} \setminus T(\overline{B}_X)$.

Dans le premier cas, il existe par les hypothèses $\varphi'$ telle que $(y_{\varphi'(\varphi(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ; dans le second cas, par définition de $\overline{T(\overline{B}_X)}$ on peut trouver une suite :

$$[((y'_k)_{k\in\mathbb{N}})_n]_{n\in\mathbb{N}}$$

telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $((y'_k)_{k\in\mathbb{N}})_n \subset T(\overline{B}_X)$ et telle que $((y'_k)_{k\in\mathbb{N}})_n \overset{\|\ \|_\infty}{\to} (y_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
De sorte que, par les hypothèses, $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe une extractrice $\varphi'_n$ telle que la suite $((y'_{\varphi'_n(k)})_{k\in\mathbb{N}})_n$ soit convergente dans $\overline{T(\overline{B}_X)}$.

Comme $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ tel que $\forall m, n \geq N_\epsilon$ : $\|[((y'_k)_{k\in\mathbb{N}})_m] - [((y'_k)_{k\in\mathbb{N}})_n]\|_\infty < \epsilon$ on peut forcer $\varphi'_n(k) \to \varphi'(k)$.

On a dés lors que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\underbrace{(y'_{\varphi'_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}}_{\text{Convergente dans } \overline{T(\overline{B}_X)}})_n = \underbrace{(y_{\varphi'(\varphi(k))})_{k\in\mathbb{N}}}_{\text{Convergente dans } \overline{T(\overline{B}_X)}}$$

Et on vient donc de montrer que, de toute suite $y_k \subset \overline{T(\overline{B}_X)}$, il était possible d'extraire une sous-suite convergente. Donc $\overline{T(\overline{B}_X)}$ est une partie séquentiellement compacte dans un Banach donc compacte. De plus, dans un espace séparé, une partie est relativement compacte si et seulement si son adhérence est compacte.
Ce qui prouve $T(\overline{B}_X)$ relativement compacte. $\square$

*a.* En l'occurrence un Banach donc un espace métrique et séparé vérifiant cet axiome.