L'ensemble des quaternions fendus est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, c'est à dire que ses éléments s'écrivent $z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, où $\langle 1, i, j, k \rangle$ est une base de l'espace vectoriel sous-jacent avec la table de multiplication suivante :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	1	-i
k	k	j	i	1

Quaternions Fendus $\mathbb{H}$

De la même façon que pour les quaternions on peut découper un quaternion fendu sous la forme :

$$z = \underbrace{x_0}_{S_z} + \underbrace{(x_1 i + x_2 j + x_3 k)}_{\vec{V}_z}$$

c'est à dire $z = S_z + \vec{V}_z$

On peut définir :

1. Un conjugué $\overline{z} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ ou encore $z = S_z - \vec{V}_z$.
2. Une pseudo-norme $N(z) = \sqrt{|z\overline{z}|} = \sqrt{|x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2|}$
3. Une forme polaire

L'usage des quaternions fendus en physique a conduit à définir le vocabulaire suivant :

- $z \cdot \overline{z} \quad > 0$ Elément de type Temps
- $z \cdot \overline{z} \quad < 0$ Elément de type Espace
- $z \cdot \overline{z} \quad = 0$ Elément de type Lumière

ce qui permet de définir les formes polaires suivantes :

1. z est de type espace : $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0$ a fortiori $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0$

   On pose : $\sinh(\theta) = \dfrac{x_0}{N(z)}$, $\cosh(\theta) = \dfrac{\sqrt{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{N(z)}$ et $\vec{\varepsilon} = \dfrac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

   $\Rightarrow \ z = N(z)(\sinh(\theta) + \vec{\varepsilon}\cosh(\theta))$

2. z est de type temps : $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$

   (a) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0$

   On pose : $n(z) = \operatorname{sgn}(x_0)N(z)$, $\cosh(\theta) = \dfrac{x_0}{n(z)}$, $\sinh(\theta) = \dfrac{\sqrt{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{n(z)}$ et $\vec{\varepsilon} = \dfrac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

   $\Rightarrow \ z = n(z)(\cosh(\theta) + \vec{\varepsilon}\sinh(\theta))$

   (b) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$

   On pose : $\cos(\theta) = \dfrac{x_0}{N(z)}$, $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{N(z)}$ et $\vec{\varepsilon} = \dfrac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}$

   $\Rightarrow \ z = N(z)(\cos(\theta) + \vec{\varepsilon}\sin(\theta))$

(c) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ et donc $x_0 \neq 0$

On pose : $n(z) = x_0$, $\text{cosp}(\theta) = \dfrac{x_0}{n(z)}$, $\text{sinp}(\theta) = \dfrac{1}{n(z)}$ et $\vec{\varepsilon} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$\Rightarrow\ z = n(z)(\text{cosp}(\theta) + \vec{\varepsilon}\,\text{sinp}(\theta))$