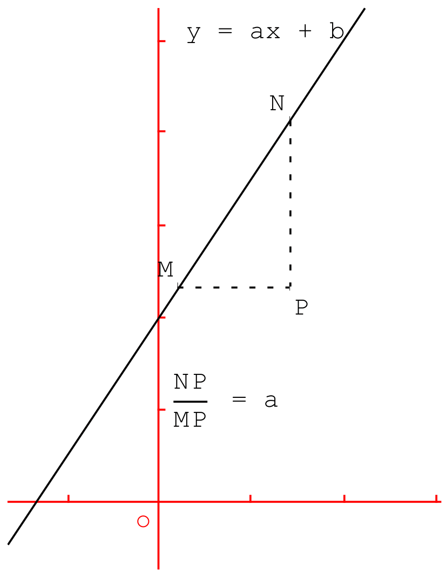
Considérons que les constantes données par le problème soient : α, β, δ, μ, K, τ_f (temps de propagation forward), τ_b (temps de propagation backward) et τ ($= \tau_f + \tau_b$).
On exprimera les inconnues en fonction de ces données.

1)



La figure ci-contre rappelle le lien entre la pente « a » d'une droite d'équation $y = ax + b$ et la tangente de l'angle $\widehat{PMN}$.

Si on applique ce rappel à la portion de droite tracée sur le graphique n° 1, on peut affirmer : $\dfrac{\lambda_{max} - \mu}{\tau} = \alpha$ d'où finalement : $\lambda_{max} = \alpha \times \tau + \mu$

La différence $\lambda_{max} - \mu$ « correspond » sur la figure ci-contre à la distance NP : on l'obtient de façon triviale en calculant la <u>différence des ordonnées</u> $y_N - y_P$.

2) Toujours en observant les graphiques, on voit que $\lambda_{max} = \alpha \times t_1$ donc $t_1 = \dfrac{\lambda_{max}}{\alpha}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{t_1} = \dfrac{\alpha\tau + \mu}{\alpha}$

Remarque : $t_1 = \tau + \dfrac{\mu}{\alpha}$ or, d'après les graphiques : $t_1 = t_0 + \tau$ donc $t_0 = \dfrac{\mu}{\alpha}$

3) $\lambda(t_2) = \mu$ donc $Ke^{\frac{t_2}{\beta}} = \mu$ d'où $t_2 = \beta \ln\left(\dfrac{\mu}{K}\right)$ puis $t_2 + \tau_f = t_M = \beta \ln\left(\dfrac{\mu}{K}\right) + \tau_f$

4) $q(t) = \displaystyle\int_{t_{init}}^{t} (\lambda(x) - \mu)dx$; pour étudier les variations de la fonction q, on aura besoin d'étudier le signe de sa dérivée q'.
Comme la fonction q est explicitée sous la forme d'une intégrale, il suffit d'appliquer le **théorème fondamental du calcul intégral** :
la fonction F définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(u)du$ *est de classe* C^1 sur $\mathbb{R}$ *(dérivable et la dérivée est continue)* et $F'(x) = f(x)$
(autrement dit : la dérivée de la primitive d'une fonction est égale à cette fonction !)

donc on devrait logiquement avoir l'égalité $q'(t) = \lambda(t) - \mu$…
Mais il y a un déphasage temporaire entre les fonctions λ et q : pour $t \in [\, t_1 \;;\; t_4 \,]$, <u>le buffer reçoit les informations de la source de flux après un temps de propagation</u> τ_f. On aura donc :

$$\boldsymbol{q'(t) = \lambda(t - \tau_f) - \mu}$$

On aura alors $q'(t) = Ke^{\frac{t - \tau_f}{\beta}} - \mu$ (β est une constante négative d'après la forme de la courbe)

$q'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow Ke^{\frac{t-\tau_f}{\beta}} \geqslant \mu \Leftrightarrow e^{\frac{t-\tau_f}{\beta}} \geqslant \dfrac{\mu}{K}$ (car $K > 0$) $\Leftrightarrow \dfrac{t - \tau_f}{\beta} \geqslant \ln\left(\dfrac{\mu}{K}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

puis finalement : $t \leqslant \beta \times ln\left(\dfrac{\mu}{K}\right) + \tau_f$ (car β est négative) c'est-à-dire $t \leqslant t_2 + \tau_f$ donc $\boxed{t \leqslant t_M}$

t	0	t_M	$+\infty$
$q'(t)$	$+$	0	$-$
$q(t)$	Cte ↗	q_{max}	↘ $-\infty$

Il est clair que la fonction q atteint un maximum pour $t = t_M$.

La valeur de ce maximum q_{max} est $q(t_M)$: $q(t_M) = \int_{t_0}^{t_1}[\lambda(x)-\mu]\mathrm{d}x + \int_{t1}^{t_M}\left[\lambda(x-\tau_f)-\mu\right]\mathrm{d}x$

Notons qu'une primitive de la fonction λ est la fonction $\beta\times\lambda$; donc :

$$q(t_M) = \left[\beta\lambda(x)\right]_{t_0}^{t_1} - \mu\times(t_1-t_0) + \left[\beta\lambda(x-\tau_f)\right]_{t_1}^{t_M} - \mu\times(t_M-t_1) =$$

$$\beta\times\left(\lambda(t_1)-\lambda(t_0)\right) - \mu\times\tau + \beta\times\left(\lambda(t_M-\tau_f)-\lambda(t_1-\tau_f)\right) - \mu\times(t_M-t_1) =$$

$$\beta\times(\lambda_{max}-\mu) - \mu\times\tau + \beta\times\left(\lambda(t_2)-\alpha\times(t_1-\tau_f)\right) - \mu\times(t_M-t_1) =$$

$$\beta\alpha\tau - \mu\tau + \beta\mu - \beta(\alpha\tau+\mu) + \beta\alpha\tau_f - \mu\beta\ln\left(\frac{\mu}{K}\right) - \mu\tau_f + \mu\times\frac{\alpha\tau+\mu}{\alpha} =$$

Finalement, après simplifications : $q_{max} = (\beta\alpha-\mu)\tau_f - \mu\beta\ln\left(\frac{\mu}{K}\right) + \frac{\mu^2}{\alpha}$

5) D'après le graphique n° 2 :

$q_A = q(t_1+\tau f) = \int_{t_0}^{t_1}(\lambda(x)-\mu)\times\mathrm{d}x$ (on tient compte du temps de propagation forward)

$$q_A = \int_{t_0}^{t_1}\alpha t\mathrm{d}t - \mu\times(t_1-t_0) = \frac{\alpha}{2}(t_1^2-t_0^2) - \mu\times(t_1-t_0) = (t_1-t_0)\times\left[\frac{\alpha}{2}(t_1+t_0)-\mu\right] = (t_1-t_0)\times\left(\frac{\alpha\tau}{2}+\mu-\mu\right)$$

Finalement :

$$q_A = \frac{\alpha\tau^2}{2}$$

6) Je n'ai pas trouvé λ_{min} . J'obtiens des équations du type : $e^{ax} = bx$ dont les solutions ne peuvent pas s'exprimer analytiquement. Un détail technique sur le fonctionnement de la source et du buffer doit m'échapper...

Exprimons les inconnues t_3, t_4, et t_m en fonction de λ_{min} :

$\lambda_{min} = \alpha t_4 + \delta$ donc $t_4 = \frac{\lambda_{min}-\delta}{\alpha}$

$t_3 = t_4 - \tau$ donc $t_3 = \frac{\lambda_{min}-\delta}{\alpha} - \tau$

$t_m = t_4 - \tau_b$ donc $t_m = \frac{\lambda_{min}-\delta}{\alpha} - \tau_b$

6) D'après le graphique n°1, $\lambda\left(t_5\right)=\mu$ c'est-à-dire $\alpha t_5+\delta=\mu$ d'où $t_5=\dfrac{\mu-\delta}{\alpha}$

7) D'après le graphique n°1, $\lambda\left(t_6\right)=\lambda_{max}$ donc $\alpha t_6+\delta=\lambda_{max}$; sachant que $\lambda_{max}=\alpha\times\delta+\mu$, on aura finalement :

$$t_6=\delta+\frac{\mu-\delta}{\alpha}$$

(remarque : on retrouve $t_6-t_5=\delta$) ;