Les exercices sont indépendants.
Deux exercices sur trois au libre choix du candidat.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel ≥ 2, et A la matrice carrée d'ordre n, symétrique et tridiagonale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, expliciter (Au, v).

Rappel de notation : $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

b) Montrer que l'application $(u, v) \to (Au, v)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que la matrice A est inversible.

c) Calculer les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres $v_k = (v_{k,1} \quad v_{k,2} \quad \ldots \quad v_{k,n})^t$ associés de A, qui sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} -v_{k,j-1} + 2v_{k,j} - v_{k,j+1} = \lambda_k v_{k,j} \quad \forall j = 1, ..., n \\ v_{k,0} = v_{k,n+1} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Indication :
On commence par écrire que $v_{k,j}$ est de la forme : $v_{k,j} = C_1 z_1^j + C_2 z_2^j$

d) On rappelle les normes matricielles suivantes : $\|A\|_2 = \max\limits_{k=1,n} |\lambda_k|$ et $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,n} (\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|)$.
Calculer $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$.

e) Montrer que $||A^{-1}||_2 = O(n^2)$ quand $n \to \infty$

Exercice 2.

On considère $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et vérifiant la relation, pour tout entier $n \geq 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n \geq 1$ et en déduire que $a_n \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

3. Montrer aussi que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n \leq n^2$.

4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

5. On pose alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

   (a) Montrer que S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle

   $$(E) \qquad (1-x)y' - (1+2x)y = 1 + 2x.$$

   (b) Résoudre l'équation (E).

   (c) Exprimer alors S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3.

Soient $x = f(u)\cos v$ et $y = g(u)\sin v$. On suppose

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

et $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.

1. Calculer les fonctions f et g

2. Soit la fonction F définie par

   $$H(u, v) = F(x(u, v), y(u, v)).$$

   Exprimer $\Delta H(u, v) = \partial^2_{uu} H + \partial^2_{vv} H$ en fonction des dérivées de F.