

Économie des contrats

Dossier TD 1 : Rappels d'optimisation

Exercice 1 : Une variable de décision

Considérons un producteur de minerai dont la fonction de profit est donnée par :

$$\pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12 \quad (1)$$

1. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire la quantité optimale produite par ce producteur ?
2. À partir de la condition nécessaire, calculez la quantité optimale q^* et le profit du producteur à l'équilibre.

Exercice 2 : Deux variables de décision

Supposons maintenant que le producteur peut produire deux types de bien : le bien 1 (non raffiné) et le bien 2 (raffiné). La fonction de profit du producteur est maintenant :

$$\pi_a(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2 \quad (2)$$

Donnez les conditions nécessaires, les quantités q_1^* et q_2^* produites à l'équilibre et le profit réalisé par le producteur.

Exercice 3 : Optimisation sous contrainte avec une variable de décision

On suppose à nouveau que la fonction de profit du producteur est donnée par (1). Cependant, la taille du gisement est limitée à $S > 0$. Autrement dit, la contrainte suivante s'applique :

$$q \leq S \quad (3)$$

Écrivez le programme de maximisation du producteur puis, à l'aide de la méthode du lagrangien, résolvez ce programme et donnez les solutions explicites lorsque $S = 3$ et lorsque $S = 6$.

Exercice 4 : Optimisation sous contrainte avec deux variables de décision

On suppose à nouveau que la fonction de profit du producteur est donnée par (2). Le producteur est soumis à deux contraintes.

La première est une contrainte de minerai disponible en quantité S . Si le producteur consacre une unité de minerai à la production du bien 2, il en fabrique $\frac{1}{2}$ unité, tandis que s'il la destine au bien 1, il en obtient une unité. La première contrainte est donc :

$$q_1 + 2q_2 \leq S \quad (4)$$

La deuxième est une contrainte de stock K . On suppose qu'une unité de bien 1 occupe le même volume qu'une unité de bien 2 (le bien raffiné nécessite un confinement plus important que le brut). La seconde contrainte est donc :

$$q_1 + q_2 \leq K \quad (5)$$

Écrivez le programme de maximisation du producteur et résolvez à l'aide de la méthode du lagrangien dans le cas où on a $S = 6$ et $K = 4,5$ ainsi que dans le cas où on a $S = 3$ et $K = 2$.