

Conjetura de Hodge

Los Problemas del Milenio

Vicente Muñoz

Universidad Complutense de Madrid

1-3 Junio 2011

Conjetura de Hodge



William V. D. Hodge (1903-1975)

Conjetura de Hodge

Problema propuesto por W. Hodge en el International Congress of Mathematicians de Cambridge (US) en el año 1950.

Conjetura en las siguientes áreas:

- Geometría Diferencial
- Topología
- Geometría Algebraica
- Con ramificaciones en Geometría Aritmética, Variable Compleja, etc.

Conjetura de Hodge

Problema propuesto por W. Hodge en el International Congress of Mathematicians de Cambridge (US) en el año 1950.

Conjetura en las siguientes áreas:

- Geometría Diferencial
- Topología
- Geometría Algebraica
- Con ramificaciones en Geometría Aritmética, Variable Compleja, etc.

Conjetura de Hodge

Problema propuesto por W. Hodge en el International Congress of Mathematicians de Cambridge (US) en el año 1950.

Conjetura en las siguientes áreas:

- Geometría Diferencial
- Topología
- Geometría Algebraica
- Con ramificaciones en Geometría Aritmética, Variable Compleja, etc.

Conjetura de Hodge

Problema propuesto por W. Hodge en el International Congress of Mathematicians de Cambridge (US) en el año 1950.

Conjetura en las siguientes áreas:

- Geometría Diferencial
- Topología
- Geometría Algebraica
- Con ramificaciones en Geometría Aritmética, Variable Compleja, etc.

Conjetura de Hodge

Problema propuesto por W. Hodge en el International Congress of Mathematicians de Cambridge (US) en el año 1950.

Conjetura en las siguientes áreas:

- Geometría Diferencial
- Topología
- Geometría Algebraica
- Con ramificaciones en Geometría Aritmética, Variable Compleja, etc.

1. Crash Course (1 hora) en Geometría y Topología

1 Homología y cohomología

- Homología singular
- Formas diferenciales
- Dualidad de De Rham
- Dualidad de Poincaré
- Representación de homología por subvariedades

2 Geometría compleja

- Variedades complejas
- Cohomología de Dolbeault
- Variedades Kähler
- Descomposición de Hodge
- Teorema de Kodaira

Homología singular

La homología “cuenta” los agujeros de un espacio X .

Fue introducida por H. Poincaré en 1895.



Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Homología singular

La homología “cuenta” los agujeros de un espacio X .

Fue introducida por H. Poincaré en 1895.



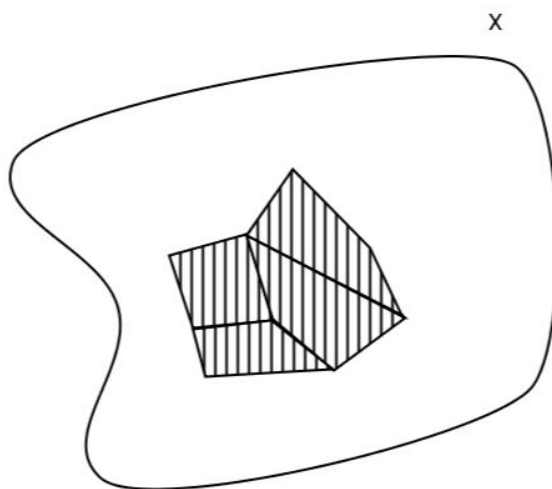
Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Homología singular

k -símplices: $S : [0, 1]^k \rightarrow X$

k -cadenas: $T = \sum n_i S_i, n_i \in \mathbb{Z}$

$$C_k(X) = \{T = \sum n_i S_i, S_i \text{ son } k\text{-símplices}\}$$

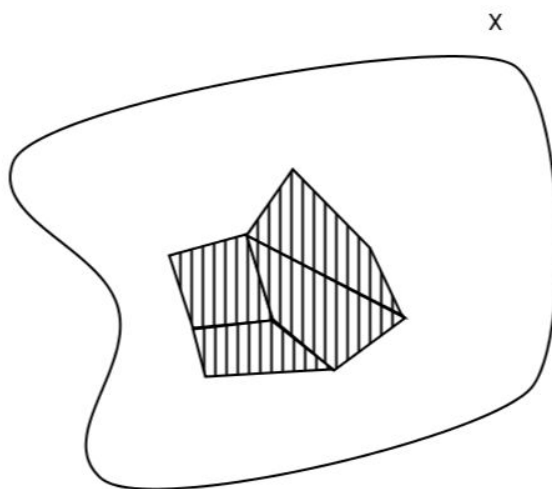


Homología singular

k -símplices: $S : [0, 1]^k \rightarrow X$

k -cadenas: $T = \sum n_i S_i, n_i \in \mathbb{Z}$

$$C_k(X) = \{T = \sum n_i S_i, S_i \text{ son } k\text{-símplices}\}$$

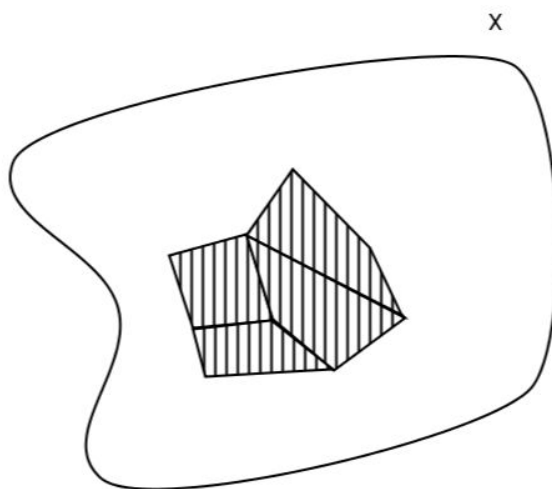


Homología singular

k -símplices: $S : [0, 1]^k \rightarrow X$

k -cadenas: $T = \sum n_i S_i, n_i \in \mathbb{Z}$

$$C_k(X) = \{T = \sum n_i S_i, S_i \text{ son } k\text{-símplices}\}$$

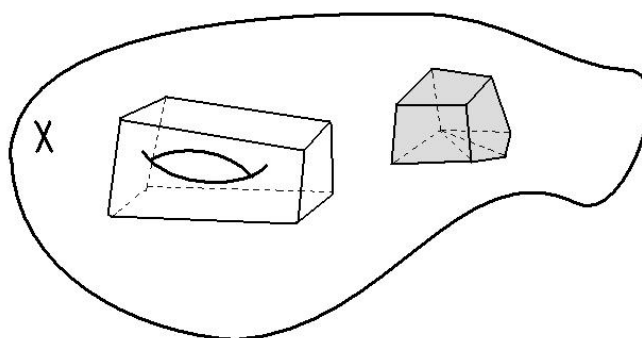


Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

Homología singular de X : $H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$

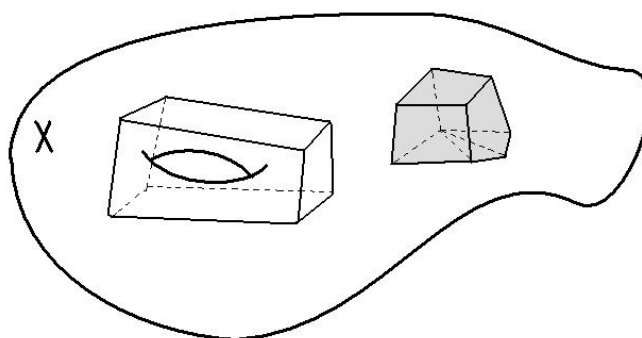
La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

Homología singular de X : $H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$

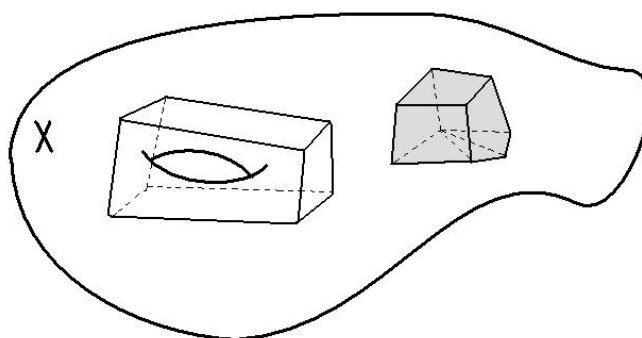
La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

Homología singular de X : $H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$

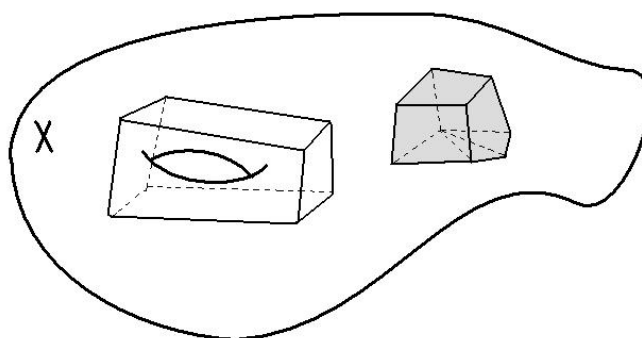
La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

Homología singular de X : $H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$

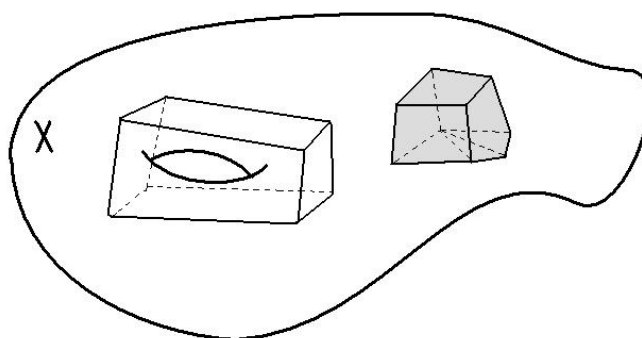
La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

$$\text{Homología singular de } X: H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$$

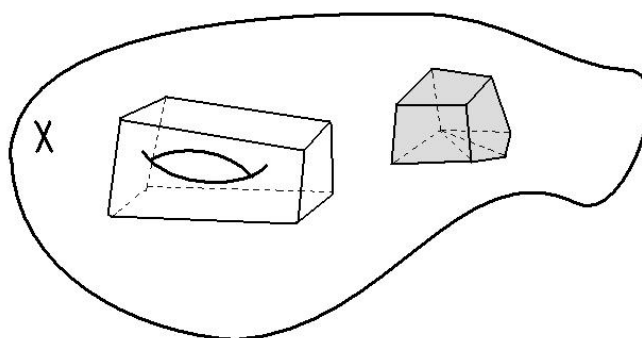
La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Borde de una k -cadena: $\partial T = \sum n_i (\partial S_i)$

k -ciclos: $Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}$

k -bordes: $B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T', T' \in C_{k+1}(X)\}$



$$B_k(X) \subset Z_k(X)$$

Homología singular de X : $H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$

La homología $H_k(X, \mathbb{Z})$ calcula los agujeros de X .

Homología singular

Usando coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

tenemos la homología singular racional, real o compleja

$$H_k(X, \mathbf{k}) = H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbf{k}$$

La homología sobre $\mathbf{k}$ elimina la torsión.

Si $H_k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_d}$, entonces $H_k(X, \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}^r$

Si $[T] \in H_k(X, \mathbb{Z})$ es un elemento de torsión, existe un natural $\ell \geq 1$ tal que $\ell [T] = 0$, y por tanto ℓT es un k -borde.

Homología singular

Usando coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:
tenemos la homología singular racional, real o compleja
 $H_k(X, \mathbf{k}) = H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbf{k}$

La homología sobre $\mathbf{k}$ elimina la torsión.

Si $H_k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_d}$, entonces $H_k(X, \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}^r$

Si $[T] \in H_k(X, \mathbb{Z})$ es un elemento de torsión, existe un natural $\ell \geq 1$ tal que $\ell [T] = 0$, y por tanto ℓT es un k -borde.

Homología singular

Usando coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:
tenemos la homología singular racional, real o compleja
 $H_k(X, \mathbf{k}) = H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbf{k}$

La homología sobre $\mathbf{k}$ elimina la torsión.

Si $H_k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_d}$, entonces $H_k(X, \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}^r$

Si $[T] \in H_k(X, \mathbb{Z})$ es un elemento de torsión, existe un natural $\ell \geq 1$ tal que $\ell [T] = 0$, y por tanto ℓT es un k -borde.

Homología singular

Usando coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:
tenemos la homología singular racional, real o compleja
 $H_k(X, \mathbf{k}) = H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbf{k}$

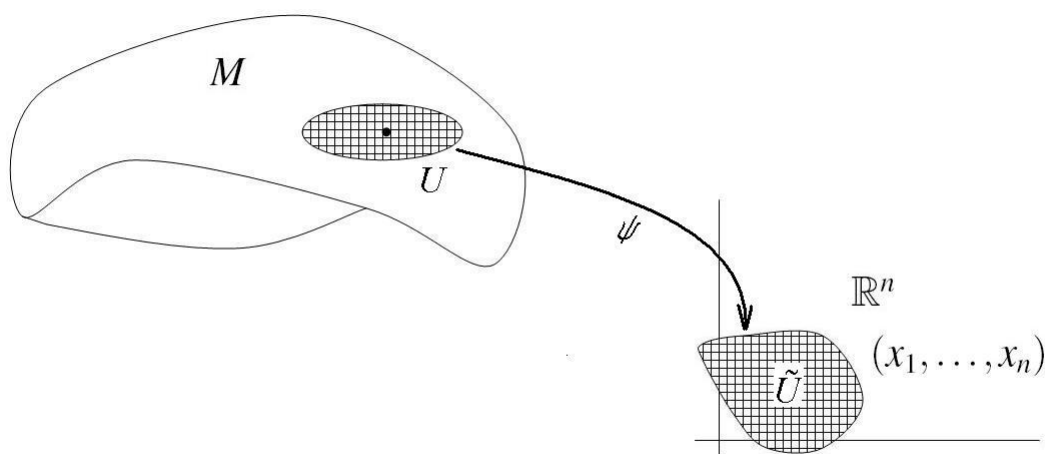
La homología sobre $\mathbf{k}$ elimina la torsión.

Si $H_k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_d}$, entonces $H_k(X, \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}^r$

Si $[T] \in H_k(X, \mathbb{Z})$ es un elemento de torsión, existe un natural $\ell \geq 1$ tal que $\ell [T] = 0$, y por tanto ℓT es un k -borde.

Formas diferenciales

M variedad diferenciable



En cada punto p se pueden poner coordenadas (locales) $(x_1, \dots, x_n)$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Formas diferenciales

1-forma: $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i dx_i$

k -formas: $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ (donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$)

$\Omega^k(M)$ = el espacio de las k -formas.

Diferencial exterior: $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

Para funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Para $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, $d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Formas cerradas: $Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$

Formas exactas: $B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$

Cohomología de De Rham

La diferencial exterior satisface $d^2 = 0 \implies B^k(M) \subset Z^k(M)$

Cohomología de De Rham: $H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$

La cohomología de De Rham nos da la obstrucción a que una forma cerrada sea exacta.



Georges de Rham (1903-1990)

Navigation icons: back, forward, search, and other presentation controls.

Cohomología de De Rham

La diferencial exterior satisface $d^2 = 0 \implies B^k(M) \subset Z^k(M)$

Cohomología de De Rham: $H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$

La cohomología de De Rham nos da la obstrucción a que una forma cerrada sea exacta.



Georges de Rham (1903-1990)



Cohomología de De Rham

La diferencial exterior satisface $d^2 = 0 \implies B^k(M) \subset Z^k(M)$

Cohomología de De Rham: $H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$

La cohomología de De Rham nos da la obstrucción a que una forma cerrada sea exacta.



Georges de Rham (1903-1990)

Dualidad de De Rham

De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología:

Sea $T = \sum \lambda_i S_i \in C_k(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$

Tenemos la integral $\int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$

$$\int : H^k(M) \otimes H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema de De Rham

La integral induce un isomorfismo: $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M, \mathbb{R})^*$

Dualidad de De Rham

De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología:

Sea $T = \sum \lambda_i S_i \in C_k(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$

Tenemos la integral $\int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$

$$\int : H^k(M) \otimes H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema de De Rham

La integral induce un isomorfismo: $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M, \mathbb{R})^*$

Dualidad de De Rham

De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología:

Sea $T = \sum \lambda_i S_i \in C_k(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$

Tenemos la integral $\int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$

$$\int : H^k(M) \otimes H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema de De Rham

La integral induce un isomorfismo: $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M, \mathbb{R})^*$

Dualidad de De Rham

De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología:

Sea $T = \sum \lambda_i S_i \in C_k(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$

Tenemos la integral $\int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$

$$\int : H^k(M) \otimes H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema de De Rham

La integral induce un isomorfismo: $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M, \mathbb{R})^*$

Dualidad de De Rham

De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología:

Sea $T = \sum \lambda_i S_i \in C_k(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$

Tenemos la integral $\int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$

$$\int : H^k(M) \otimes H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema de De Rham

La integral induce un isomorfismo: $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M, \mathbb{R})^*$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n

$\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n
 $\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n
 $\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n

$\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n

$\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

M variedad *compacta y orientada* de dimensión n
 $\rightsquigarrow$ podemos integrar n -formas en M

Si $\omega = d\beta$, entonces $\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0$

Aplicación integral: $\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es un *pairing perfecto*, es decir, produce un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré:

$$PD : H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})$$

Dualidad de Poincaré

Clase de cohomología asociada a una subvariedad:

Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k , es decir $\dim S = n - k$

Triangulando S obtenemos una clase de homología $[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$

Por tanto tenemos $PD[S] \in H^k(M)$

Existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$

Método geométrico de construir α_S : regularizar la corriente de integración a lo largo de S . El resultado es la forma de Thom de S

Dualidad de Poincaré

Clase de cohomología asociada a una subvariedad:

Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k , es decir $\dim S = n - k$

Triangulando S obtenemos una clase de homología $[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$

Por tanto tenemos $PD[S] \in H^k(M)$

Existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$

Método geométrico de construir α_S : regularizar la corriente de integración a lo largo de S . El resultado es la forma de Thom de S

Dualidad de Poincaré

Clase de cohomología asociada a una subvariedad:

Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k , es decir $\dim S = n - k$

Triangulando S obtenemos una clase de homología $[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$

Por tanto tenemos $PD[S] \in H^k(M)$

Existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$

Método geométrico de construir α_S : regularizar la corriente de integración a lo largo de S . El resultado es la forma de Thom de S

Dualidad de Poincaré

Clase de cohomología asociada a una subvariedad:

Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k , es decir $\dim S = n - k$

Triangulando S obtenemos una clase de homología $[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$

Por tanto tenemos $PD[S] \in H^k(M)$

Existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$

Método geométrico de construir α_S : regularizar la corriente de integración a lo largo de S . El resultado es la forma de Thom de S

Dualidad de Poincaré

Clase de cohomología asociada a una subvariedad:

Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k , es decir $\dim S = n - k$

Triangulando S obtenemos una clase de homología $[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$

Por tanto tenemos $PD[S] \in H^k(M)$

Existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$

Método geométrico de construir α_S : regularizar la corriente de integración a lo largo de S . El resultado es la forma de Thom de S

Representación de homología por subvariedades

Sea M una variedad compacta y orientada.

Si $S \subset M$ es una subvariedad de codimensión k , entonces

$$[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \cong H^k(M, \mathbb{Z}) \subset H^k(M, \mathbb{R})$$

En 1953, René Thom se planteó la siguiente pregunta:

Pregunta

Si $\alpha \in H^k(M, \mathbb{Z})$, ¿existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $\alpha = PD[S]$?

La respuesta es NO en general, pues hay problemas con la torsión (hay clases de torsión que no se pueden representar por subvariedades lisas).

Representación de homología por subvariedades

Sea M una variedad compacta y orientada.

Si $S \subset M$ es una subvariedad de codimensión k , entonces

$$[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \cong H^k(M, \mathbb{Z}) \subset H^k(M, \mathbb{R})$$

En 1953, René Thom se planteó la siguiente pregunta:

Pregunta

Si $\alpha \in H^k(M, \mathbb{Z})$, ¿existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $\alpha = PD[S]$?

La respuesta es NO en general, pues hay problemas con la torsión (hay clases de torsión que no se pueden representar por subvariedades lisas).

Representación de homología por subvariedades

Sea M una variedad compacta y orientada.

Si $S \subset M$ es una subvariedad de codimensión k , entonces

$$[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \cong H^k(M, \mathbb{Z}) \subset H^k(M, \mathbb{R})$$

En 1953, René Thom se planteó la siguiente pregunta:

Pregunta

Si $\alpha \in H^k(M, \mathbb{Z})$, ¿existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $\alpha = PD[S]$?

La respuesta es NO en general, pues hay problemas con la torsión (hay clases de torsión que no se pueden representar por subvariedades lisas).

Representación de homología por subvariedades

Sea M una variedad compacta y orientada.

Si $S \subset M$ es una subvariedad de codimensión k , entonces

$$[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \cong H^k(M, \mathbb{Z}) \subset H^k(M, \mathbb{R})$$

En 1953, René Thom se planteó la siguiente pregunta:

Pregunta

Si $\alpha \in H^k(M, \mathbb{Z})$, ¿existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $\alpha = PD[S]$?

La respuesta es NO en general, pues hay problemas con la torsión (hay clases de torsión que no se pueden representar por subvariedades lisas).

Representación de homología por subvariedades

Sin embargo, es cierto que siempre existe $m \gg 0$ tal que

$$m\alpha = PD[S],$$

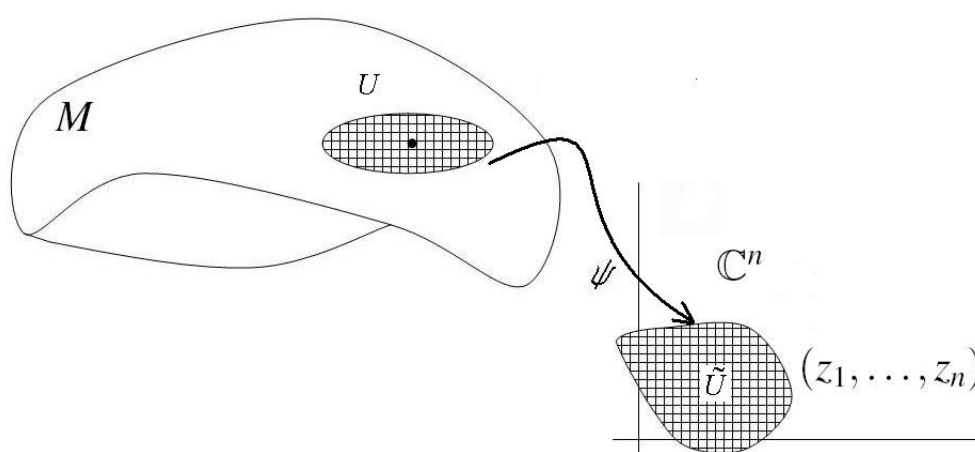
para cierta subvariedad S de M . Este resultado lo probó R. Thom (medalla Fields en 1958).



René Thom (1923-2002)

Variedades complejas

Una variedad compleja es como una variedad diferenciable cambiando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$



M variedad compleja: cada punto p tiene unas coordenadas complejas $(z_1, \dots, z_n)$

Variedades complejas

Escribimos

$$z_j = x_j + \mathbf{i} y_j$$

Por tanto, $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ son coordenadas reales, y M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Ejemplos:

- Espacio proyectivo complejo.

$$P^N(\mathbb{C}) = \{[z_0 : \dots : z_N] \mid [z_0 : \dots : z_N] = [\lambda z_0 : \dots : \lambda z_N], \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

- Variedades proyectivas.

Sean $F_1, \dots, F_d \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_N]$, polinomios homogéneos

$$S = \{[z_0 : \dots : z_N] \in P^N(\mathbb{C}) \mid F_1(z_0, \dots, z_N) = 0, \dots, F_d(z_0, \dots, z_N) = 0\}$$

Variedades complejas

Escribimos

$$z_j = x_j + \mathbf{i} y_j$$

Por tanto, $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ son coordenadas reales, y M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Ejemplos:

- Espacio proyectivo complejo.

$$P^N(\mathbb{C}) = \{[z_0 : \dots : z_N] \mid [z_0 : \dots : z_N] = [\lambda z_0 : \dots : \lambda z_N], \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

- Variedades proyectivas.

Sean $F_1, \dots, F_d \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_N]$, polinomios homogéneos

$$S = \{[z_0 : \dots : z_N] \in P^N(\mathbb{C}) \mid F_1(z_0, \dots, z_N) = 0, \dots, F_d(z_0, \dots, z_N) = 0\}$$

Variedades complejas

Escribimos

$$z_j = x_j + \mathbf{i} y_j$$

Por tanto, $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ son coordenadas reales, y M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Ejemplos:

- Espacio proyectivo complejo.

$$P^N(\mathbb{C}) = \{[z_0 : \dots : z_N] \mid [z_0 : \dots : z_N] = [\lambda z_0 : \dots : \lambda z_N], \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

- Variedades proyectivas.

Sean $F_1, \dots, F_d \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_N]$, polinomios homogéneos

$$S = \{[z_0 : \dots : z_N] \in P^N(\mathbb{C}) \mid F_1(z_0, \dots, z_N) = 0, \dots, F_d(z_0, \dots, z_N) = 0\}$$

Cohomología de Dolbeault

M variedad compleja

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

(p, q) -formas: $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$\Omega^{p,q}(M)$ = espacio de las (p, q) -formas.

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=p+q} \Omega^{p,q}(M)$$

Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x_j, y_j) = f(z_j, \bar{z}_j)$,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Cohomología de Dolbeault

M variedad compleja

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

(p, q) -formas: $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$\Omega^{p,q}(M)$ = espacio de las (p, q) -formas.

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=p+q} \Omega^{p,q}(M)$$

Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x_j, y_j) = f(z_j, \bar{z}_j)$,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Cohomología de Dolbeault

M variedad compleja

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

(p, q) -formas: $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$\Omega^{p,q}(M)$ = espacio de las (p, q) -formas.

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=p+q} \Omega^{p,q}(M)$$

Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x_j, y_j) = f(z_j, \bar{z}_j)$,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Cohomología de Dolbeault

M variedad compleja

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

(p, q) -formas: $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$\Omega^{p,q}(M)$ = espacio de las (p, q) -formas.

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=p+q} \Omega^{p,q}(M)$$

Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x_j, y_j) = f(z_j, \bar{z}_j)$,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Cohomología de Dolbeault

M variedad compleja

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

(p, q) -formas: $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$

Abreviando: $\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$\Omega^{p,q}(M)$ = espacio de las (p, q) -formas.

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=p+q} \Omega^{p,q}(M)$$

Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x_j, y_j) = f(z_j, \bar{z}_j)$,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Cohomología de Dolbeault

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), & \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M), & \bar{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

$\Omega_{\mathcal{O}}^p(M)$ = haz de las p -formas holomorfas: $\alpha = \sum f_I dz_I$, con f_I funciones holomorfas.

Resolución de haces: $\Omega_{\mathcal{O}}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \Omega^{p,n} \rightarrow 0$

Cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \bar{\partial}) = H^q(M, \Omega_{\mathcal{O}}^p)$$

Cohomología de Dolbeault

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), & \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M), & \bar{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

$\Omega_{\mathcal{O}}^p(M)$ = haz de las p -formas holomorfas: $\alpha = \sum f_I dz_I$, con f_I funciones holomorfas.

Resolución de haces: $\Omega_{\mathcal{O}}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \Omega^{p,n} \rightarrow 0$

Cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \bar{\partial}) = H^q(M, \Omega_{\mathcal{O}}^p)$$

Cohomología de Dolbeault

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), & \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M), & \bar{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

$\Omega_{\mathcal{O}}^p(M)$ = haz de las p -formas holomorfas: $\alpha = \sum f_I dz_I$, con f_I funciones holomorfas.

Resolución de haces: $\Omega_{\mathcal{O}}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \Omega^{p,n} \rightarrow 0$

Cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \bar{\partial}) = H^q(M, \Omega_{\mathcal{O}}^p)$$

Cohomología de Dolbeault

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), & \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M), & \bar{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

$\Omega_{\mathcal{O}}^p(M)$ = haz de las p -formas holomorfas: $\alpha = \sum f_I dz_I$, con f_I funciones holomorfas.

Resolución de haces: $\Omega_{\mathcal{O}}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \Omega^{p,n} \rightarrow 0$

Cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \bar{\partial}) = H^q(M, \Omega_{\mathcal{O}}^p)$$

Cohomología de Dolbeault

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), & \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M), & \bar{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

$\Omega_{\mathcal{O}}^p(M)$ = haz de las p -formas holomorfas: $\alpha = \sum f_I dz_I$, con f_I funciones holomorfas.

Resolución de haces: $\Omega_{\mathcal{O}}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \Omega^{p,n} \rightarrow 0$

Cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \bar{\partial}) = H^q(M, \Omega_{\mathcal{O}}^p)$$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Variedades Kähler

M variedad compleja,

$h = \sum h_{jk}(z) dz_j d\bar{z}_k$ métrica hermítica.

La métrica hermítica nos da:

- Una métrica riemanniana $g(u, v) = \operatorname{Re}(h(u, v))$
- Una $(1, 1)$ -forma $\omega(u, v) = -\operatorname{Im}(h(u, v))$

De hecho: $g(u, v) = \omega(u, \mathbf{i} v)$, $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, con $d\omega = 0$.

Si M es una variedad Kähler, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$

$\frac{1}{n!} \omega^n = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, forma de volumen

$\int_M [\omega^n] = \operatorname{Vol}(M) > 0 \implies [\omega]^n \neq 0 \implies [\omega] \neq 0$

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$, $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$, $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study: Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.

En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,

$$h = \sum dz_j d\bar{z}_j.$$

Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$, $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.

Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.

- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.

Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
$$h = \sum dz_j d\bar{z}_j.$$
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$, $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es
 $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$.

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es
 $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es
 $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$

Ejemplos de variedades Kähler

- El espacio proyectivo $P^N(\mathbb{C})$ es Kähler. Métrica de Fubini-Study:
Tomamos coordenadas para $P^N(\mathbb{C}) = \{[w_0 : w_1 : \dots : w_N]\}$ dadas por $z_j = w_j/w_0$.
En el origen $(0, \dots, 0)$ ponemos la métrica estándar,
 $h = \sum dz_j d\bar{z}_j$.
Usamos “traslaciones” $\varphi_A : P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$, $\varphi_A([w]) = [A w]$,
 $A \in U(N+1)$, para definir h en los demás puntos.
Esta métrica h_{FS} tiene $(1, 1)$ -forma asociada $\omega_{FS} \in \Omega^{1,1}$, que es
 $U(n+1)$ -invariante $\implies d\omega_{FS} = 0$.
- Una variedad proyectiva $S \subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler.
Basta tomar $h_S = h_{FS}|_S$ y $\omega_S = \omega_{FS}|_S$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

M variedad Riemanniana compacta

Laplaciano: $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Laplaciano en las k -formas:

Sea d la diferencial exterior y d^* su adjunto: $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Entonces $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

Una k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

$$\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0.$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\} = \{\alpha \mid d\alpha = d^*\alpha = 0\}$$

Formas armónicas

El teorema de Hodge dice:

$$\begin{aligned} H^k(M) &= \frac{\{\alpha \mid d\alpha = 0\}}{\{\alpha = d\beta\}} \\ &= \{\alpha \mid d\alpha = 0, \alpha \perp d(\Omega^{k-1}(M))\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{\alpha \mid d\alpha = 0, d^*\alpha = 0\} \\ &= \mathcal{H}^k(M) \end{aligned}$$

((*) recordemos que $\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^*\alpha, \beta \rangle$)

Formas armónicas

El teorema de Hodge dice:

$$\begin{aligned} H^k(M) &= \frac{\{\alpha \mid d\alpha = 0\}}{\{\alpha = d\beta\}} \\ &= \{\alpha \mid d\alpha = 0, \alpha \perp d(\Omega^{k-1}(M))\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{\alpha \mid d\alpha = 0, d^*\alpha = 0\} \\ &= \mathcal{H}^k(M) \end{aligned}$$

((*) recordemos que $\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^*\alpha, \beta \rangle$)

Descomposición de Hodge

Sea ahora M variedad *compacta Kähler*.

La cohomología de Dolbeault también tiene una descripción con formas armónicas:

$$H^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) = \ker \Delta|_{\Omega^{p,q}(M)}$$

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

Δ preserva las (p, q) -formas $\implies$

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

Descomposición de Hodge

Sea ahora M variedad *compacta Kähler*.

La cohomología de Dolbeault también tiene una descripción con formas armónicas:

$$H^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) = \ker \Delta|_{\Omega^{p,q}(M)}$$

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

Δ preserva las (p, q) -formas $\implies$

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

Descomposición de Hodge

Sea ahora M variedad *compacta Kähler*.

La cohomología de Dolbeault también tiene una descripción con formas armónicas:

$$H^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) = \ker \Delta|_{\Omega^{p,q}(M)}$$

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

Δ preserva las (p, q) -formas $\implies$

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

Descomposición de Hodge

Sea ahora M variedad *compacta Kähler*.

La cohomología de Dolbeault también tiene una descripción con formas armónicas:

$$H^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) = \ker \Delta \big|_{\Omega^{p,q}(M)}$$

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

Δ preserva las (p, q) -formas $\implies$

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$

Variedades Kähler y variedades proyectivas

Teorema de Kodaira

Sea (M, ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M \subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración:

$\Rightarrow$

$H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]$, donde $H = \{z_0 = 0\} \subset P^N(\mathbb{C})$ es un hiperplano

$\Rightarrow H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\omega_{FS}] = PD[H] \in H^{1,1}(P^N(\mathbb{C})) \cap H^2(P^N(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [\omega] = [\omega_{FS}|_M] = PD[H \cap M] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$



Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding.





Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding.





Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding.





Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding.





Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding.





Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $L \rightarrow M$ fibrado de línea complejo con $c_1(L) = [\omega]$

$\implies$ existe una conexión ∇ en L con curvatura $\omega = R_\nabla$

$\implies \nabla = \partial_L + \bar{\partial}_L, \bar{\partial}_L^2 = R_\nabla^{0,2} = 0$

$\implies (L, \bar{\partial}_L)$ es un fibrado holomorfo.

Como $R_\nabla > 0$, $L^{\otimes k} \rightarrow M$ tiene “muchas” secciones holomorfas

$\implies \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(L^{\otimes k})$, tales que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow P^N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

es un embedding. □

Conjetura de Hodge

Los Problemas del Milenio

Vicente Muñoz

Universidad Complutense de Madrid

1-3 Junio 2011

2. Enunciado de la Conjetura de Hodge

1 La Conjetura de Hodge

- Clases de homología puras
- Enunciado de la conjetura
- Teorema de Lefschetz de clases $(1, 1)$
- La conjetura de Hodge sobre $\mathbb{Z}$
- La conjetura de Hodge para variedades Kähler

2 La Conjetura Generalizada de Hodge

- Estructuras de Hodge
- Filtración aritmética y filtración homológica
- Conjetura original de Hodge
- Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa
- Conjetura Generalizada de Hodge

Conjetura de Hodge



William V. D. Hodge (1903-1975)

La Conjetura de Hodge

De forma llana, la conjetura de Hodge se plantea como el problema de representabilidad de clases de homología, en el caso de las variedades complejas.

Sería la extensión de la pregunta de Thom al caso complejo.

La Conjetura de Hodge

De forma llana, la conjetura de Hodge se plantea como el problema de representabilidad de clases de homología, en el caso de las variedades complejas.

Sería la extensión de la pregunta de Thom al caso complejo.

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de homología puras

M variedad de Kähler compacta

$S \subset M$ subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n - p$

$$PD[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$$

Claramente, $PD[S] \in H^{2p}(M, \mathbb{Z})$

$$H^{2p}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M)$$

Sea $\alpha \in H^{q_1, q_2}(M)$, $q_1 + q_2 = 2n - 2p$

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}}$$

$$\langle \alpha, PD[S] \rangle = \int_S \alpha$$

Localmente $S = \{z_1 = 0, \dots, z_p = 0\}$

Si $q_1 > n - p$, entonces $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{q_1}} = 0$

Si $q_2 > n - p$, entonces $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q_2}} = \overline{dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{q_2}}} = 0$

Si $(q_1, q_2) \neq (n - p, n - p)$, entonces $\int_S \alpha = 0$

$$\implies PD[S] \in H^{p,p}(M)$$

Clases de Hodge y ciclos complejos

Clases de Hodge: $\text{Hod}^p(M) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$

Ciclos complejos:

$C^p(M) = \{ \sum n_i S_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, S_i \subset M \text{ subvariedades complejas, } \text{codim } S_i = p \}$

$$\begin{array}{ccc} C^p(M) & \longrightarrow & \text{Hod}^p(M) \\ \sum n_i S_i & \mapsto & \sum n_i PD[S_i] \end{array}$$

Con coeficientes racionales:

$\text{Hod}^p(M, \mathbb{Q}) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$

$C^p(M, \mathbb{Q}) = \{ \sum r_i S_i \mid r_i \in \mathbb{Q}, S_i \subset M, \text{codim } S_i = p \}.$

$$C^p(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$$

Clases de Hodge y ciclos complejos

Clases de Hodge: $\text{Hod}^p(M) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$

Ciclos complejos:

$C^p(M) = \{ \sum n_i S_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, S_i \subset M \text{ subvariedades complejas, } \text{codim } S_i = p \}$

$$\begin{array}{ccc} C^p(M) & \longrightarrow & \text{Hod}^p(M) \\ \sum n_i S_i & \mapsto & \sum n_i PD[S_i] \end{array}$$

Con coeficientes racionales:

$\text{Hod}^p(M, \mathbb{Q}) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$

$C^p(M, \mathbb{Q}) = \{ \sum r_i S_i \mid r_i \in \mathbb{Q}, S_i \subset M, \text{codim } S_i = p \}.$

$$C^p(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$$

Clases de Hodge y ciclos complejos

Clases de Hodge: $\text{Hod}^p(M) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$

Ciclos complejos:

$C^p(M) = \{ \sum n_i S_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, S_i \subset M \text{ subvariedades complejas, } \text{codim } S_i = p \}$

$$\begin{array}{ccc} C^p(M) & \longrightarrow & \text{Hod}^p(M) \\ \sum n_i S_i & \mapsto & \sum n_i PD[S_i] \end{array}$$

Con coeficientes racionales:

$\text{Hod}^p(M, \mathbb{Q}) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$

$C^p(M, \mathbb{Q}) = \{ \sum r_i S_i \mid r_i \in \mathbb{Q}, S_i \subset M, \text{codim } S_i = p \}.$

$$C^p(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$$

Clases de Hodge y ciclos complejos

Clases de Hodge: $\text{Hod}^p(M) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$

Ciclos complejos:

$C^p(M) = \{ \sum n_i S_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, S_i \subset M \text{ subvariedades complejas, } \text{codim } S_i = p \}$

$$\begin{array}{ccc} C^p(M) & \longrightarrow & \text{Hod}^p(M) \\ \sum n_i S_i & \mapsto & \sum n_i PD[S_i] \end{array}$$

Con coeficientes racionales:

$\text{Hod}^p(M, \mathbb{Q}) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$

$C^p(M, \mathbb{Q}) = \{ \sum r_i S_i \mid r_i \in \mathbb{Q}, S_i \subset M, \text{codim } S_i = p \}.$

$$C^p(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$$

El problema del milenio

Conjetura de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces $C^p(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$ es sobreyectivo.

Es decir, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$
buscamos que $\alpha = \sum r_i PD[S_i]$, con $r_i \in \mathbb{Q}$

O bien, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $m \gg 0$ tal que

$$m\alpha = \sum n_i PD[S_i]$$

para un ciclo complejo $\sum n_i S_i$

El problema del milenio

Conjetura de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces $C^p(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$ es sobreyectivo.

Es decir, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$
buscamos que $\alpha = \sum r_i PD[S_i]$, con $r_i \in \mathbb{Q}$

O bien, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $m \gg 0$ tal que

$$m\alpha = \sum n_i PD[S_i]$$

para un ciclo complejo $\sum n_i S_i$

El problema del milenio

Conjetura de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces $C^p(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$ es sobreyectivo.

Es decir, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$
buscamos que $\alpha = \sum r_i PD[S_i]$, con $r_i \in \mathbb{Q}$

O bien, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $m \gg 0$ tal que

$$m\alpha = \sum n_i PD[S_i]$$

para un ciclo complejo $\sum n_i S_i$

El problema del milenio

Conjetura de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces $C^p(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$ es sobreyectivo.

Es decir, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$
buscamos que $\alpha = \sum r_i PD[S_i]$, con $r_i \in \mathbb{Q}$

O bien, si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces existe $m \gg 0$ tal que

$$m\alpha = \sum n_i PD[S_i]$$

para un ciclo complejo $\sum n_i S_i$

Teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$

La motivación de la conjetura de Hodge proviene de:

Teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$

Sea M una variedad proyectiva.

Si $\alpha \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.



Solomon Lefschetz (1884-1972)

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfas)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfas)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfas)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfas)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfos)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Fibrados holomorfos

M variedad compleja

Un fibrado de línea holomorfo es

$\pi : L \rightarrow M$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, $L|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$

Para $i, j \in I \rightsquigarrow$ funciones de transición (holomorfas)

$g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, tales que

$$\begin{aligned} L|_{U_i} &\rightarrow L|_{U_j} \\ (x, \lambda) &\mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Condición de 1-cociclo: $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$

$g = [g_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, donde $\mathcal{O}$ es el haz de funciones holomorfas

$\text{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ parametriza fibrados de línea holomorfos en M

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ & & & & & & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Sucesión exponencial

La sucesión exacta de haces

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \\ H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H^2(M, \mathcal{O}) & = & H^{0,2}(M) & & \end{array}$$

Descomposición de Hodge: $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \implies j_*(\alpha) = 0$$

$\implies$ existe $e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \text{Jac}(M)$ tal que $\alpha = \delta(e) = c_1(L_e)$, para un fibrado de línea holomorfo $L_e \rightarrow M$

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Jacobiana

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}$$

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$$

$b_1 = \dim H^1(M)$ es el primer número de Betti de M . Es par.

Por tanto, $H^{0,1}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1}$

Sucesión exponencial:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \rightarrow \text{Jac}(M) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$,

$$\text{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1}$$

es un toro complejo.

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\rightsquigarrow$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\leadsto$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\rightsquigarrow$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\rightsquigarrow$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\rightsquigarrow$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

Demostración del teorema de Lefschetz

Sea M compacta Kähler

$$\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$$

$\rightsquigarrow$ existe un fibrado de línea $L \rightarrow M$ holomorfo con $c_1(L) = \alpha$

Si M es proyectiva, entonces L tiene secciones meromorfas

Sea s una sección meromorfa de L , $s : M \rightarrow L$, $s = \frac{s_1}{s_0}$

El divisor

$$D = (s = 0) - (s = \infty) = \{s_1 = 0\} - \{s_0 = 0\} \in C^1(M)$$

cumple $PD[D] = c_1(L) = \alpha$

La conjetura de Hodge sobre $\mathbb{Z}$

El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ es cierto para clases enteras.

Versión de la conjetura de Hodge para clases enteras:

Sea $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.

Para $p > 1$ no es cierta:

- Atiyah y Hirzebruch (1962) probaron la existencia de clases de torsión, todas ellas de Hodge, que no son algebraicas.
- Kollár (1996) encontró clases α no de torsión con α no algebraica y $m\alpha$ algebraica para $m \gg 0$.

La conjetura de Hodge sobre $\mathbb{Z}$

El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ es cierto para clases enteras.

Versión de la conjetura de Hodge para clases enteras:

Sea $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.

Para $p > 1$ no es cierta:

- Atiyah y Hirzebruch (1962) probaron la existencia de clases de torsión, todas ellas de Hodge, que no son algebraicas.
- Kollár (1996) encontró clases α no de torsión con α no algebraica y $m\alpha$ algebraica para $m \gg 0$.

La conjetura de Hodge sobre $\mathbb{Z}$

El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ es cierto para clases enteras.

Versión de la conjetura de Hodge para clases enteras:

Sea $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.

Para $p > 1$ no es cierta:

- 1 Atiyah y Hirzebruch (1962) probaron la existencia de clases de torsión, todas ellas de Hodge, que no son algebraicas.
- 2 Kollár (1996) encontró clases α no de torsión con α no algebraica y $m\alpha$ algebraica para $m \gg 0$.

La conjetura de Hodge sobre $\mathbb{Z}$

El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ es cierto para clases enteras.

Versión de la conjetura de Hodge para clases enteras:

Sea $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.

Para $p > 1$ no es cierta:

- 1 Atiyah y Hirzebruch (1962) probaron la existencia de clases de torsión, todas ellas de Hodge, que no son algebraicas.
- 2 Kollár (1996) encontró clases α no de torsión con α no algebraica y $m\alpha$ algebraica para $m \gg 0$.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

La conjetura de Hodge no es cierta para variedades no proyectivas.
Ni siquiera para $p = 1$

Contraejemplo de Zucker (1977)

Sea $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, con matriz de períodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & ia & ib \\ c & d & -ic & -id \end{pmatrix}$$

El retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ está generado por los 4 vectores

$e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, d)$, $e_3 = (ia, -ic)$, $e_4 = (ib, -id)$.

Sea $e_{ij} = \{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$

$$PD[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})((e_{12} - e_{34}) + i(e_{14} - e_{23}))$$

Por ej., $\int_{e_{12}} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 = \int_{e_1} dz_1 \int_{e_2} d\bar{z}_2 - \int_{e_2} dz_1 \int_{e_1} d\bar{z}_2 = a\bar{d} - b\bar{c}$

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

La conjetura de Hodge no es cierta para variedades no proyectivas.
Ni siquiera para $p = 1$

Contraejemplo de Zucker (1977)

Sea $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, con matriz de períodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & ia & ib \\ c & d & -ic & -id \end{pmatrix}$$

El retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ está generado por los 4 vectores
 $e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, d)$, $e_3 = (ia, -ic)$, $e_4 = (ib, -id)$.

Sea $e_{ij} = \{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$

$$PD[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (\bar{a}d - b\bar{c})((e_{12} - e_{34}) + i(e_{14} - e_{23}))$$

Por ej., $\int_{e_{12}} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 = \int_{e_1} dz_1 \int_{e_2} d\bar{z}_2 - \int_{e_2} dz_1 \int_{e_1} d\bar{z}_2 = \bar{a}d - b\bar{c}$

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

La conjetura de Hodge no es cierta para variedades no proyectivas.
Ni siquiera para $p = 1$

Contraejemplo de Zucker (1977)

Sea $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, con matriz de períodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & ia & ib \\ c & d & -ic & -id \end{pmatrix}$$

El retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ está generado por los 4 vectores
 $e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, d)$, $e_3 = (ia, -ic)$, $e_4 = (ib, -id)$.

Sea $e_{ij} = \{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$

$$PD[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (\bar{a}d - b\bar{c})((e_{12} - e_{34}) + i(e_{14} - e_{23}))$$

Por ej., $\int_{e_{12}} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 = \int_{e_1} dz_1 \int_{e_2} d\bar{z}_2 - \int_{e_2} dz_1 \int_{e_1} d\bar{z}_2 = \bar{a}d - b\bar{c}$

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

La conjetura de Hodge no es cierta para variedades no proyectivas.
Ni siquiera para $p = 1$

Contraejemplo de Zucker (1977)

Sea $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, con matriz de períodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & ia & ib \\ c & d & -ic & -id \end{pmatrix}$$

El retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ está generado por los 4 vectores

$e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, d)$, $e_3 = (ia, -ic)$, $e_4 = (ib, -id)$.

Sea $e_{ij} = \{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$

$$PD[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (\bar{a}d - b\bar{c})((e_{12} - e_{34}) + i(e_{14} - e_{23}))$$

Por ej., $\int_{e_{12}} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 = \int_{e_1} dz_1 \int_{e_2} d\bar{z}_2 - \int_{e_2} dz_1 \int_{e_1} d\bar{z}_2 = \bar{a}d - b\bar{c}$

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

La conjetura de Hodge no es cierta para variedades no proyectivas.
Ni siquiera para $p = 1$

Contraejemplo de Zucker (1977)

Sea $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, con matriz de períodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & ia & ib \\ c & d & -ic & -id \end{pmatrix}$$

El retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ está generado por los 4 vectores
 $e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, d)$, $e_3 = (ia, -ic)$, $e_4 = (ib, -id)$.

Sea $e_{ij} = \{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$

$$PD[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (\bar{a}d - b\bar{c})((e_{12} - e_{34}) + i(e_{14} - e_{23}))$$

Por ej., $\int_{e_{12}} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 = \int_{e_1} dz_1 \int_{e_2} d\bar{z}_2 - \int_{e_2} dz_1 \int_{e_1} d\bar{z}_2 = \bar{a}d - b\bar{c}$

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$
$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$

$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$

$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$

$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$
$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$

$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$
$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

La conjetura de Hodge para variedades Kähler

$$[dz_1 \wedge d\bar{z}_2] = (a\bar{d} - b\bar{c})(\mu + \mathbf{i}\nu)$$

$$\mu = PD[e_{12} - e_{34}], \nu = PD[e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

Para a, b, c, d genéricos, $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle$

Sea $J : M \rightarrow M$, $J(z_1, z_2) = (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2)$

J es una aplicación holomorfa

$$J^*(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) = -\mathbf{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_2) \implies J^*\mu = -\mu, J^*\nu = -\nu$$

Luego $J^* = -\text{Id}$ en $C^1(M)$

$$C^1(M) = 0$$

$\implies$ El teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

Estructuras de Hodge

Una estructura de Hodge de peso $k \in \mathbb{Z}$ es $(V_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{C}})$, con $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^r$, $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$, $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^r$ y una descomposición $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$, tal que

$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$$

Filtración de Hodge: $F^p = \bigoplus_{p'+q'=k, p' \geq p} V^{p',q'}$

La filtración F^p recupera la descomposición de Hodge: $V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$.

Estructuras de Hodge

Una estructura de Hodge de peso $k \in \mathbb{Z}$ es $(V_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{C}})$, con $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^r$, $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$, $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^r$ y una descomposición $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$, tal que

$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$$

Filtración de Hodge: $F^p = \bigoplus_{p'+q'=k, p' \geq p} V^{p',q'}$

La filtración F^p recupera la descomposición de Hodge: $V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$.

Estructuras de Hodge

Una estructura de Hodge de peso $k \in \mathbb{Z}$ es $(V_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{C}})$, con $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^r$, $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$, $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^r$ y una descomposición $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$, tal que

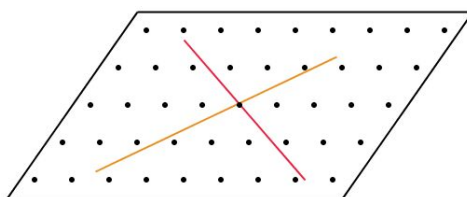
$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$$

Filtración de Hodge: $F^p = \bigoplus_{p'+q'=k, p' \geq p} V^{p',q'}$

La filtración F^p recupera la descomposición de Hodge: $V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$.

Observaciones

- **Números de Hodge:** $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. Se tiene $h^{p,q} = h^{q,p}$
- Si k es impar, entonces $\dim V$ es par.
 $\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p < q} 2 h^{p,q}$
- Para M variedad compacta Kähler, la cohomología $H^k(M, \mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k . El k -ésimo número de Betti $b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M)$.
- Las clases de Hodge de una variedad M son
 $\text{Hod}^p(M) := H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$
 intersección de un subespacio complejo $H^{p,p}(M)$ con un retículo $H^{2p}(M, \mathbb{Z})$
 $\rightsquigarrow$ problema aritmético.

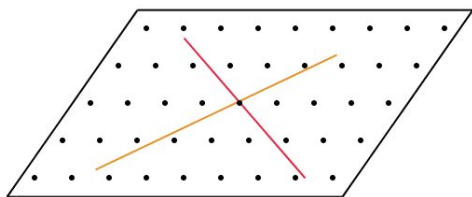


Observaciones

- **Números de Hodge:** $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. Se tiene $h^{p,q} = h^{q,p}$
- Si k es impar, entonces $\dim V$ es par.

$$\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p < q} 2 h^{p,q}$$
- Para M variedad compacta Kähler, la cohomología $H^k(M, \mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k . El k -ésimo número de Betti $b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M)$.
- Las clases de Hodge de una variedad M son

$$\text{Hod}^p(M) := H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$$
intersección de un subespacio complejo $H^{p,p}(M)$ con un retículo $H^{2p}(M, \mathbb{Z})$
 $\rightsquigarrow$ problema aritmético.

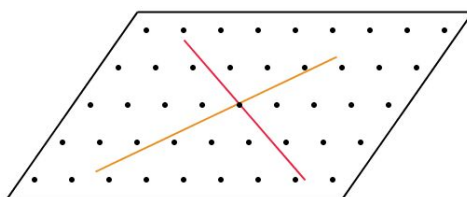


Observaciones

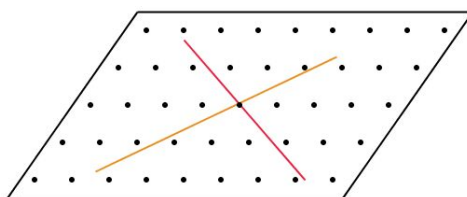
- Números de Hodge: $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. Se tiene $h^{p,q} = h^{q,p}$
- Si k es impar, entonces $\dim V$ es par.

$$\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p < q} 2 h^{p,q}$$
- Para M variedad compacta Kähler, la cohomología $H^k(M, \mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k . El k -ésimo número de Betti $b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M)$.
- Las clases de Hodge de una variedad M son

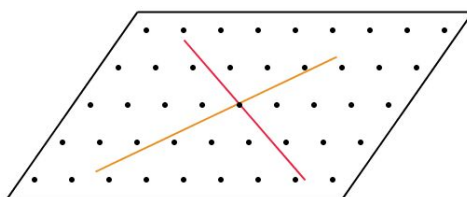
$$\text{Hod}^p(M) := H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$$
intersección de un subespacio complejo $H^{p,p}(M)$ con un retículo $H^{2p}(M, \mathbb{Z})$
 $\leadsto$ problema aritmético.



Observaciones



Observaciones

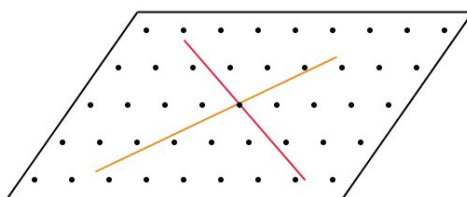


Observaciones

- Números de Hodge: $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. Se tiene $h^{p,q} = h^{q,p}$
- Si k es impar, entonces $\dim V$ es par.

$$\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p < q} 2 h^{p,q}$$
- Para M variedad compacta Kähler, la cohomología $H^k(M, \mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k . El k -ésimo número de Betti $b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M)$.
- Las clases de Hodge de una variedad M son

$$\text{Hod}^p(M) := H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$$
 intersección de un subespacio complejo $H^{p,p}(M)$ con un retículo $H^{2p}(M, \mathbb{Z})$
 $\rightsquigarrow$ problema aritmético.

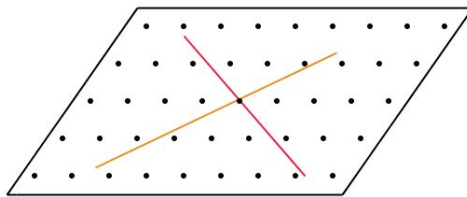


Observaciones

- Números de Hodge: $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. Se tiene $h^{p,q} = h^{q,p}$
- Si k es impar, entonces $\dim V$ es par.

$$\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p < q} 2 h^{p,q}$$
- Para M variedad compacta Kähler, la cohomología $H^k(M, \mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k . El k -ésimo número de Betti $b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M)$.
- Las clases de Hodge de una variedad M son

$$\text{Hod}^p(M) := H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \subset H^{2p}(M, \mathbb{C})$$
 intersección de un subespacio complejo $H^{p,p}(M)$ con un retículo $H^{2p}(M, \mathbb{Z})$
 $\rightsquigarrow$ problema aritmético.



Filtración aritmética y filtración homológica

Sea $c \geq 0$. Si $S \subset M$ es subvariedad compleja de codimensión (compleja) c en M ,

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-2c-(k-2c)}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M).$$

La imagen de i_* está contenida en $H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)$

Filtración aritmética:

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = c}} \text{Im} \left(i_* : H^{k-2c}(S) \rightarrow H^k(M) \right)$$

$\rightsquigarrow F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k

Filtración homológica:

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Filtración aritmética y filtración homológica

Sea $c \geq 0$. Si $S \subset M$ es subvariedad compleja de codimensión (compleja) c en M ,

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-2c-(k-2c)}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M).$$

La imagen de i_* está contenida en $H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)$

Filtración aritmética:

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = c}} \text{Im} \left(i_* : H^{k-2c}(S) \rightarrow H^k(M) \right)$$

$\rightsquigarrow F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k

Filtración homológica:

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Filtración aritmética y filtración homológica

Sea $c \geq 0$. Si $S \subset M$ es subvariedad compleja de codimensión (compleja) c en M ,

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-2c-(k-2c)}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M).$$

La imagen de i_* está contenida en $H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)$

Filtración aritmética:

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim} S = c}} \text{Im} \left(i_* : H^{k-2c}(S) \rightarrow H^k(M) \right)$$

$\rightsquigarrow F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k

Filtración homológica:

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Filtración aritmética y filtración homológica

Sea $c \geq 0$. Si $S \subset M$ es subvariedad compleja de codimensión (compleja) c en M ,

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-2c-(k-2c)}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M).$$

La imagen de i_* está contenida en $H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)$

Filtración aritmética:

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim} S = c}} \text{Im} \left(i_* : H^{k-2c}(S) \rightarrow H^k(M) \right)$$

$\rightsquigarrow F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k

Filtración homológica:

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Filtración aritmética y filtración homológica

Sea $c \geq 0$. Si $S \subset M$ es subvariedad compleja de codimensión (compleja) c en M ,

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-2c-(k-2c)}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M).$$

La imagen de i_* está contenida en $H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)$

Filtración aritmética:

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = c}} \text{Im} \left(i_* : H^{k-2c}(S) \rightarrow H^k(M) \right)$$

$\rightsquigarrow F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k

Filtración homológica:

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \dots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Hodge enunció su conjetura como una pregunta, en la conferencia que impartió en el primer Congreso Internacional de Matemáticos, el ICM de 1950, que tuvo lugar en Harvard y en el MIT (Massachusetts, US).

Conjetura original de Hodge

Para M variedad proyectiva, se tiene que $F_a^c H^k(M) = F_h^c H^k(M)$.



Comentarios

- En el enunciado propuesto por Hodge, se pide demostrar la igualdad sobre $\mathbb{Z}$. Ahora se sabe que la conjetura sólo es plausible sobre $\mathbb{Q}$.

Pedimos por tanto: $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = F_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

- La versión clásica se corresponde con el caso $k = 2p$, $c = p$.

$$F_h^p H^{2p}(M) = H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(M)$$

$$\begin{aligned} F_a^p H^{2p}(M) &= \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = p}} \text{Im} \left(i_* : H^0(S) \rightarrow H^k(M) \right) \\ &= \{PD[S] \mid \text{codim } S = p\} \end{aligned}$$

Comentarios

- En el enunciado propuesto por Hodge, se pide demostrar la igualdad sobre $\mathbb{Z}$. Ahora se sabe que la conjetura sólo es plausible sobre $\mathbb{Q}$.

Pedimos por tanto: $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = F_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

- La versión clásica se corresponde con el caso $k = 2p$, $c = p$.

$$F_h^p H^{2p}(M) = H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(M)$$

$$\begin{aligned} F_a^p H^{2p}(M) &= \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = p}} \text{Im} \left(i_* : H^0(S) \rightarrow H^k(M) \right) \\ &= \{PD[S] \mid \text{codim } S = p\} \end{aligned}$$

Comentarios

- En el enunciado propuesto por Hodge, se pide demostrar la igualdad sobre $\mathbb{Z}$. Ahora se sabe que la conjetura sólo es plausible sobre $\mathbb{Q}$.

Pedimos por tanto: $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = F_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

- La versión clásica se corresponde con el caso $k = 2p$, $c = p$.

$$F_h^p H^{2p}(M) = H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(M)$$

$$\begin{aligned} F_a^p H^{2p}(M) &= \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = p}} \text{Im} \left(i_* : H^0(S) \rightarrow H^k(M) \right) \\ &= \{PD[S] \mid \text{codim } S = p\} \end{aligned}$$

Comentarios

- En el enunciado propuesto por Hodge, se pide demostrar la igualdad sobre $\mathbb{Z}$. Ahora se sabe que la conjetura sólo es plausible sobre $\mathbb{Q}$.

Pedimos por tanto: $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = F_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

- La versión clásica se corresponde con el caso $k = 2p$, $c = p$.

$$F_h^p H^{2p}(M) = H^{2p}(M, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(M)$$

$$\begin{aligned} F_a^p H^{2p}(M) &= \bigcup_{\substack{S \subset M \\ \text{codim } S = p}} \text{Im} \left(i_* : H^0(S) \rightarrow H^k(M) \right) \\ &= \{ PD[S] \mid \text{codim } S = p \} \end{aligned}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1, z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

Grothendieck probó que la conjetura original de Hodge (sobre $\mathbb{Q}$) es falsa, tal como estaba formulada.

Contraejemplo: $c = 1$, $k = 3$. Ejemplo en el que

$$F_a^1 H^3(M) \neq F_h^1 H^3(M) = H^3(M, \mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

$F_a^1 H^3(M)$ es una estructura de Hodge $\implies \dim F_a^1 H^3(M)$ par.

Veamos un ejemplo en el que $\dim F_h^1 H^3(M)$ es impar.

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{ con } \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$M = C \times C \times C$$

Coordenadas z_1 , z_2 y z_3 . Sea $\alpha \in A = F_h^1 H^3(M)$.

$$\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, \gamma_{ijk} \rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M, \mathbb{Q})$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

$$\text{La condición } \int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0 \text{ da}$$

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Grothendieck: la conjetura original de Hodge es falsa

$$M = C \times C \times C$$

$$H^3(M) = (H^2(C) \otimes H^1(C) \otimes H^0(C))^{\oplus 6} \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$H^3(M) = \left(\bigoplus_6 H^1(C) \right) \oplus H^1(C)^{\otimes 3}$$

$$\dim A \equiv \dim A' \pmod{2}$$

$$A' = H^1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))$$

$$\text{Sea } \alpha \in A', a = PD(\alpha) \in H_1(C, \mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M, \mathbb{Q})$$

$$a = r_1 \xi_{111} + r_2 \xi_{11\tau} + r_3 \xi_{1\tau 1} + r_4 \xi_{\tau 11} + r_5 \xi_{1\tau\tau} + r_6 \xi_{\tau 1\tau} + r_7 \xi_{\tau\tau 1} + r_8 \xi_{\tau\tau\tau}$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$

La condición $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$ da

$$r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 = 0$$

$$\implies \dim A' = 5 \implies \dim A \text{ impar.}$$

Conjetura Generalizada de Hodge

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la conjetura.

Sea $\widehat{F}_h^c H^k(M) \subset F_h^c H^k(M)$ el mayor subespacio que es una estructura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces
 $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

Esta conjetura es equivalente a la Conjetura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la conjetura.

Sea $\widehat{F}_h^c H^k(M) \subset F_h^c H^k(M)$ el mayor subespacio que es una estructura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces
 $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

Esta conjetura es equivalente a la Conjetura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la conjetura.

Sea $\widehat{F}_h^c H^k(M) \subset F_h^c H^k(M)$ el mayor subespacio que es una estructura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces
 $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

Esta conjetura es equivalente a la Conjetura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la conjetura.

Sea $\widehat{F}_h^c H^k(M) \subset F_h^c H^k(M)$ el mayor subespacio que es una estructura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces
 $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

Esta conjetura es equivalente a la Conjetura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la conjetura.

Sea $\widehat{F}_h^c H^k(M) \subset F_h^c H^k(M)$ el mayor subespacio que es una estructura de Hodge.

Conjetura Generalizada de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces
 $F_a^c H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}_h^c H^k(M, \mathbb{Q})$.

Esta conjetura es equivalente a la Conjetura de Hodge.

Conjetura de Hodge

Los Problemas del Milenio

Vicente Muñoz

Universidad Complutense de Madrid

1-3 Junio 2011

3. Algunos resultados y especulaciones

1 Algunos resultados

- Reducción a casos especiales
- Variedades abelianas
- Grupo de Mumford-Tate
- Toros de Weil

2 ¿La conjetura de Hodge es cierta o falsa?

- Recolección de ejemplos
- Construcciones de ciclos algebraicos
- Búsqueda de contraejemplos
- Comentario final

La Conjetura de Hodge

Conjetura de Hodge

Sea M una variedad compleja proyectiva. Entonces $C^p(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hod}^p(M, \mathbb{Q})$ es sobreyectivo.



William V. D. Hodge (1903-1975)

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Hay un isomorfismo $L^{p,p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\sim} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

⇒ CH es cierta para clases $(n - p, n - p)$

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1, 1)$
 $\rightsquigarrow$ conjetura cierta para $p = 1$.
- Basta probar el caso $p \leq n/2$.

M variedad Kähler compacta. Consideramos:

$$\begin{aligned} L : H^{p,q}(M) &\rightarrow H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge [\omega] \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad fuerte de Lefschetz)

Hay un isomorfismo $L^{n-2p} : H^{p,p}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-p}(M)$

L lleva clases de Hodge a clases de Hodge.

L lleva clases algebraicas a clases algebraicas:

$$L(PD[S]) = PD[S \cap H]$$

Por tanto, si CH es cierta para clases (p, p) con $p \leq n/2$

$\implies$ CH es cierta para clases $(n-p, n-p)$.

Algunos resultados preliminares

- Consecuencia: la conjetura de Hodge es cierta en dimensión (compleja) 3.
- La conjetura de Hodge es cierta para Grassmannianas, espacios proyectivos y variedades de bandera.
En estos casos, $C^p(M, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H^{2p}(M, \mathbb{Q})$.
 $\implies H^{2p}(M, \mathbb{C}) = H^{p,p}(M)$ y todas las clases son de Hodge.

Algunos resultados preliminares

- Consecuencia: la conjetura de Hodge es cierta en dimensión (compleja) 3.
- La conjetura de Hodge es cierta para Grassmannianas, espacios proyectivos y variedades de bandera.
En estos casos, $C^p(M, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H^{2p}(M, \mathbb{Q})$.
 $\implies H^{2p}(M, \mathbb{C}) = H^{p,p}(M)$ y todas las clases son de Hodge.

Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.

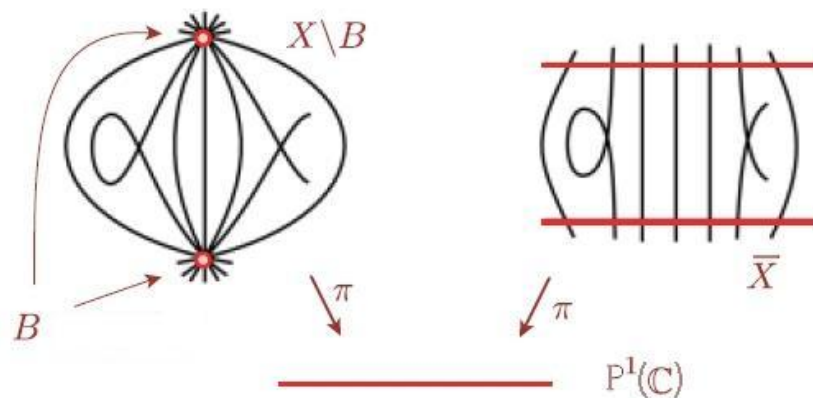
Podemos suponer $p < n/2$

Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.

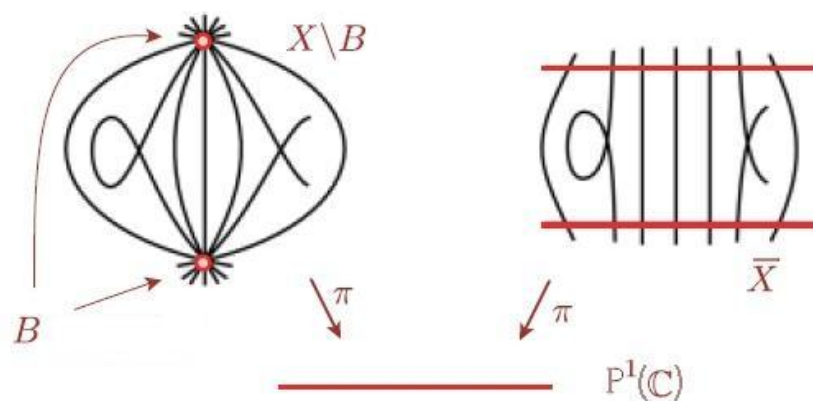
Podemos suponer $p < n/2$

Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.

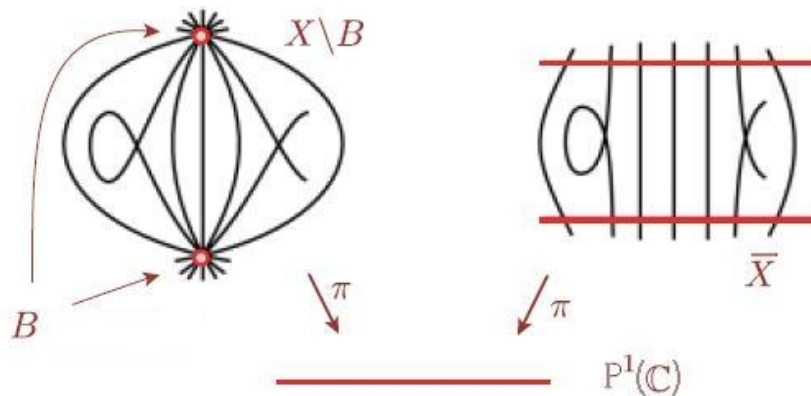
Podemos suponer $p < n/2$

Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



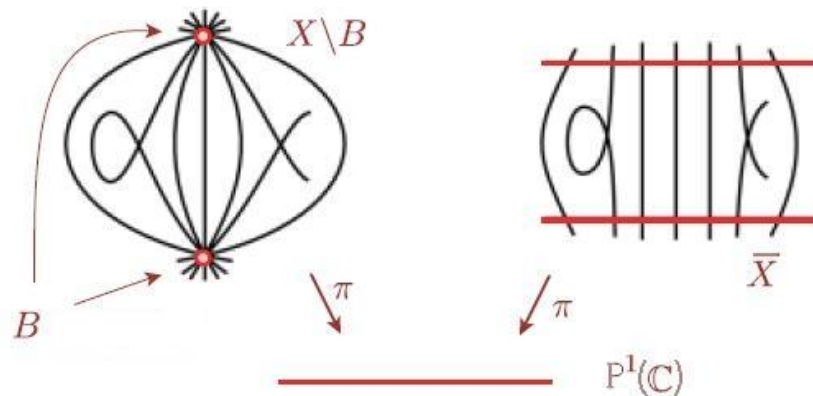
Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.
Podemos suponer $p < n/2$
Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



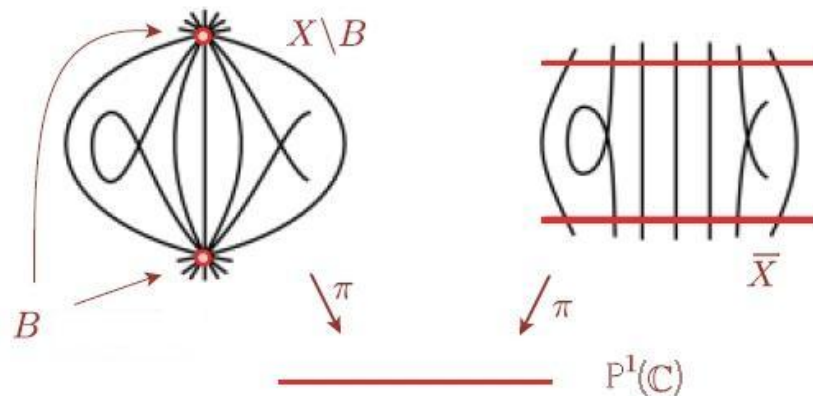
Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.
Podemos suponer $p < n/2$
Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



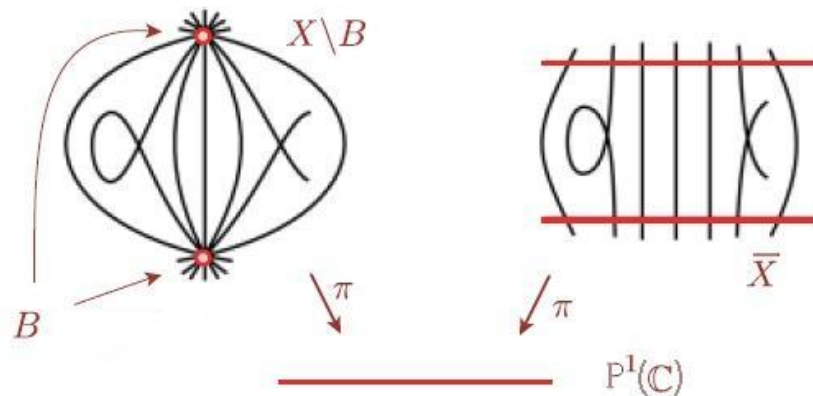
Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.
Podemos suponer $p < n/2$
Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



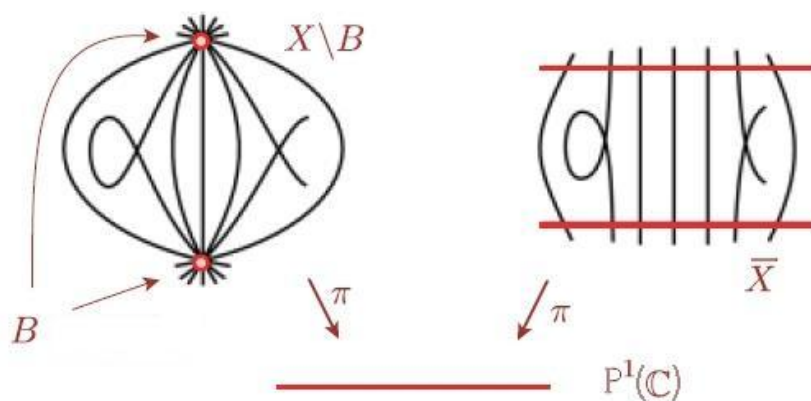
Algunos resultados preliminares

- Basta probar el caso $p = n/2$, n par.
Podemos suponer $p < n/2$
Trabajamos por inducción en $k = n - 2p$. Supongamos $k \geq 1$

Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Sea $Y = X \cap H$ una sección hiperplana lisa, $\dim(Y) = n - 1$. Entonces $H^k(X) \cong H^k(Y)$ para $k < n - 1$, $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$.

Fibración de Lefschetz: $\bar{X} = \text{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C})$.



Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\Rightarrow$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\Rightarrow$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\Rightarrow PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\Rightarrow$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\Rightarrow$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\Rightarrow PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\Rightarrow$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\Rightarrow$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\Rightarrow PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\Rightarrow$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\Rightarrow$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\Rightarrow PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\Rightarrow$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\Rightarrow$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\Rightarrow PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\implies$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\implies$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\implies PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

Consideramos la fibración

$$\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C})) \rightarrow P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, $Y_t = \pi^{-1}(t)$.

El esquema de Hilbert parametriza las variedades complejas de codimensión p .

Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge.

Para t genérico, existe $C_t \subset Y_t$, tal que

$PD[C_t] = m\alpha|_{Y_t} \in H^{2p}(Y_t)$, $m \gg 0$. (Por inducción)

$\implies$ hay una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\bar{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C_{t_0}

$\implies$ existe $\bar{C} \subset \bar{X}$, $\dim(\bar{C}) = \dim(C) + 1 = n - 1 - p + 1 = n - p$

$PD[\bar{C}]|_{Y_{t_0}} = PD[C_{t_0}] = m\alpha|_{Y_{t_0}}$

$\implies PD[\bar{C}] = m\alpha$ (Prop. fuerte de Lefschetz)

Algunos resultados preliminares

- Basta considerar *clases primitivas* con $p = n/2$ y n par.

$$H^{p,p}(M) = H_{\text{prim}}^{p,p}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)).$$

Las clases primitivas $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,p}(M)$ son las que verifican que $L(\alpha) = 0$.

Por los casos previos (e inducción) las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son algebraicas

$\implies$ las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ son algebraicas.

$(\alpha = PD[S] \implies L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = PD[S \cap H])$

Algunos resultados preliminares

- Basta considerar *clases primitivas* con $p = n/2$ y n par.

$$H^{p,p}(M) = H_{\text{prim}}^{p,p}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)).$$

Las clases primitivas $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,p}(M)$ son las que verifican que $L(\alpha) = 0$.

Por los casos previos (e inducción) las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son algebraicas

$\implies$ las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ son algebraicas.
($\alpha = PD[S] \implies L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = PD[S \cap H]$)

Algunos resultados preliminares

- Basta considerar *clases primitivas* con $p = n/2$ y n par.

$$H^{p,p}(M) = H_{\text{prim}}^{p,p}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)).$$

Las clases primitivas $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,p}(M)$ son las que verifican que $L(\alpha) = 0$.

Por los casos previos (e inducción) las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son algebraicas

$\implies$ las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ son algebraicas.

$(\alpha = PD[S] \implies L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = PD[S \cap H])$

Algunos resultados preliminares

- Basta considerar *clases primitivas* con $p = n/2$ y n par.

$$H^{p,p}(M) = H_{\text{prim}}^{p,p}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)).$$

Las clases primitivas $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,p}(M)$ son las que verifican que $L(\alpha) = 0$.

Por los casos previos (e inducción) las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son algebraicas

$\implies$ las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ son algebraicas.
($\alpha = PD[S] \implies L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = PD[S \cap H]$)

Algunos resultados preliminares

- Basta considerar *clases primitivas* con $p = n/2$ y n par.

$$H^{p,p}(M) = H_{\text{prim}}^{p,p}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)).$$

Las clases primitivas $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,p}(M)$ son las que verifican que $L(\alpha) = 0$.

Por los casos previos (e inducción) las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son algebraicas

$\implies$ las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ son algebraicas.

$(\alpha = PD[S] \implies L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = PD[S \cap H])$

Algunos resultados preliminares

- Dado un ciclo algebraico $\alpha = PD[S]$, $p = \text{codim } S$, tomamos $\alpha + m PD[H]^{\cap p}$, $m \gg 0$
 $\rightsquigarrow$ existe una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^{\cap p} = [S']$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{r_i > 0} r_i [S_i] - \sum_{r'_j > 0} r'_j [S'_j],$$

entonces $\alpha = [\tilde{S}] - [\tilde{S}']$, con $\tilde{S}, \tilde{S}'$ lisas.

En vez de buscar ciclos algebraicos, podemos buscar subvariedades complejas (lisas)

Algunos resultados preliminares

- Dado un ciclo algebraico $\alpha = PD[S]$, $p = \text{codim } S$, tomamos $\alpha + m PD[H]^{\cap p}$, $m \gg 0$
 $\rightsquigarrow$ existe una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^{\cap p} = [S']$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{r_i > 0} r_i [S_i] - \sum_{r'_j > 0} r'_j [S'_j],$$

entonces $\alpha = [\tilde{S}] - [\tilde{S}']$, con $\tilde{S}, \tilde{S}'$ lisas.

En vez de buscar ciclos algebraicos, podemos buscar subvariedades complejas (lisas)

Algunos resultados preliminares

- Dado un ciclo algebraico $\alpha = PD[S]$, $p = \text{codim } S$, tomamos $\alpha + m PD[H]^{\cap p}$, $m \gg 0$
 $\rightsquigarrow$ existe una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^{\cap p} = [S']$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{r_i > 0} r_i [S_i] - \sum_{r'_j > 0} r'_j [S'_j],$$

entonces $\alpha = [\tilde{S}] - [\tilde{S}']$, con $\tilde{S}, \tilde{S}'$ lisas.

En vez de buscar ciclos algebraicos, podemos buscar subvariedades complejas (lisas)

Algunos resultados preliminares

- Dado un ciclo algebraico $\alpha = PD[S]$, $p = \text{codim } S$, tomamos $\alpha + m PD[H]^{\cap p}$, $m \gg 0$
 $\rightsquigarrow$ existe una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^{\cap p} = [S']$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{r_i > 0} r_i [S_i] - \sum_{r'_j > 0} r'_j [S'_j],$$

entonces $\alpha = [\tilde{S}] - [\tilde{S}']$, con $\tilde{S}, \tilde{S}'$ lisas.

En vez de buscar ciclos algebraicos, podemos buscar subvariedades complejas (lisas)

Algunos resultados preliminares

- Dado un ciclo algebraico $\alpha = PD[S]$, $p = \text{codim } S$, tomamos $\alpha + m PD[H]^{\cap p}$, $m \gg 0$
 $\rightsquigarrow$ existe una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^{\cap p} = [S']$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{r_i > 0} r_i [S_i] - \sum_{r'_j > 0} r'_j [S'_j],$$

entonces $\alpha = [\tilde{S}] - [\tilde{S}']$, con $\tilde{S}, \tilde{S}'$ lisas.

En vez de buscar ciclos algebraicos, podemos buscar subvariedades complejas (lisas)

Variedades abelianas

Un *toro complejo* es una variedad compleja $T = \mathbb{C}^n / \Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n} \rangle \subset \mathbb{C}^n$, retículo.

Matriz de períodos:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{2n,n} \end{pmatrix}$$

$$H^{p,q}(T) = \bigwedge^{p,q} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q\} \rangle$$

Un toro complejo es Kähler: $\omega = \frac{i}{2} \sum h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad abeliana es un toro complejo que es variedad proyectiva

Variedades abelianas

Un *toro complejo* es una variedad compleja $T = \mathbb{C}^n / \Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n} \rangle \subset \mathbb{C}^n$, retículo.

Matriz de períodos:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{2n,n} \end{pmatrix}$$

$$H^{p,q}(T) = \bigwedge^{p,q} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q\} \rangle$$

Un toro complejo es Kähler: $\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad abeliana es un toro complejo que es variedad proyectiva

Variedades abelianas

Un *toro complejo* es una variedad compleja $T = \mathbb{C}^n / \Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n} \rangle \subset \mathbb{C}^n$, retículo.

Matriz de períodos:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{2n,n} \end{pmatrix}$$

$$H^{p,q}(T) = \bigwedge^{p,q} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q\} \rangle$$

Un toro complejo es Kähler: $\omega = \frac{i}{2} \sum h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Definición

Una variedad abeliana es un toro complejo que es variedad proyectiva

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_t-p} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{ es entera si } \int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$$

para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$
$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_t-p} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{ es entera si } \int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$$

para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_{t-p}} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$ para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_{t-p}} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$
para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_t-p} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$
para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_{t-p}} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$
para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_t-p} \end{pmatrix}_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$
para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Variedades abelianas

Por el Teorema de Kodaira, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$, $\omega > 0$

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, 2n\} \rangle$$

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \dots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \det \left(\begin{matrix} a_{\alpha_s, i_t} \\ \bar{a}_{\alpha_s, j_t-p} \end{matrix} \right)_{1 \leq s, t \leq k}$$

$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ es entera si $\int_{e_A} \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}$
para todo A , $|A| = 2$

Si la matriz de periodos es muy genérica $\implies T$ no es proyectiva.

Si T es *variedad abeliana y genérica* $\implies$

$$H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T, \mathbb{Z}) = \langle [\omega]^p \rangle$$

$\rightsquigarrow$ La Conjetura de Hodge es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) &\mapsto z^p \bar{z}^q v \end{aligned}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) &\mapsto z^p \bar{z}^q v \end{aligned}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) &\mapsto z^p \bar{z}^q v \end{aligned}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) &\mapsto z^p \bar{z}^q v \end{aligned}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} & \rightarrow & V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) & \mapsto & z^p \bar{z}^q v \end{array}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} & \rightarrow & V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) & \mapsto & z^p \bar{z}^q v \end{array}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

Grupo de Mumford-Tate

V estructura de Hodge de peso k

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ (z, v) &\mapsto z^p \bar{z}^q v \end{aligned}$$

para $v \in V^{p,q}$. Esta acción recupera la estructura de Hodge.

Definición

El grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ es el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$, tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

El grupo G fija todas las clases de Hodge $\text{Hod}^p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$ en V y en toda su álgebra tensorial.

El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las clases (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las clases (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las clases (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las clases (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las clases (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las classes (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Grupo de Mumford-Tate

M variedad compleja proyectiva. $\text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$

- Calcular el grupo $MT(M)$.
- Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande
 $\rightsquigarrow \text{Hod}^p(M) = \text{Hod}^p(H^{2p}(M))$ es pequeño
- Puede ocurrir que

$$\underbrace{\text{Hod}^1(M) \otimes \dots \otimes \text{Hod}^1(M)}_p \rightarrow \text{Hod}^p(M)$$

sea sobreyectivo. Las classes (p, p) son intersecciones completas.

Como todas las clases en $\text{Hod}^1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$), CH es cierta.

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

Sea $J|_{W_+} = \bar{\varphi}$, $J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J)/V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4, \text{ retículo de rango 8}$$

$$\varphi : L \rightarrow L, \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi}) \text{ es un espacio vectorial complejo } \cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$$

$$\text{Consideramos una descomposición } V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$$

$$W_{\pm} \text{ subespacios } \bar{\varphi}\text{-complejos de dimensión 2}$$

$$\text{Sea } J|_{W_+} = \bar{\varphi}, J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$$

$$\implies (V_{\mathbb{R}}, J) \text{ es espacio vectorial complejo.}$$

$$\text{Toro de Weil: } T = (V_{\mathbb{R}}, J) / V_{\mathbb{Z}}$$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

$$\text{Sea } J|_{W_+} = \bar{\varphi}, J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J)/V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

Sea $J|_{W_+} = \bar{\varphi}$, $J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J)/V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

Sea $J|_{W_+} = \bar{\varphi}$, $J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J) / V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

Sea $J|_{W_+} = \bar{\varphi}$, $J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J)/V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

Sea $J|_{W_+} = \bar{\varphi}$, $J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J)/V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

$$\text{Sea } J|_{W_+} = \bar{\varphi}, \quad J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J) / V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

$$\text{Sea } J|_{W_+} = \bar{\varphi}, \quad J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J) / V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

André Weil (1980) propuso una variedad abeliana T de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge.

Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}$$

$V_{\mathbb{Z}} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$, retículo de rango 8

$$\varphi : L \rightarrow L, \quad \varphi(x) = \sqrt{-d} x$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, \bar{\varphi})$ es un espacio vectorial complejo $\cong (\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$

Consideramos una descomposición $V_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$

$W_{\pm}$ subespacios $\bar{\varphi}$ -complejos de dimensión 2

$$\text{Sea } J|_{W_+} = \bar{\varphi}, \quad J|_{W_-} = -\bar{\varphi}$$

$\implies (V_{\mathbb{R}}, J)$ es espacio vectorial complejo.

Toro de Weil: $T = (V_{\mathbb{R}}, J) / V_{\mathbb{Z}}$

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi, \varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_{J}^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_{J}^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\mathrm{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_{J}^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\mathrm{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi, \varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\mathrm{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi, \varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Toros de Weil

$\varphi J = J\varphi$, $\varphi(V_{\mathbb{Z}}) \subset V_{\mathbb{Z}} \implies \varphi$ es endomorfismo de T

$$\text{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$$

(toro con *multiplicación compleja*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] &= L \cong \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} \subset \bigwedge^4 V_{\mathbb{Z}} = H^4(T, \mathbb{Z}), \\ \bigwedge_L^4 V_{\mathbb{Z}} &\subset \bigwedge_{\varphi}^4 V_{\mathbb{R}} \subset \bigwedge_{\varphi}^4 (W_+ \oplus W_-) = \bigwedge_{\varphi}^2 W_+ \otimes \bigwedge_{\varphi}^2 W_- \\ &= \bigwedge_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge_J^2 W_-} \subset \bigwedge_J^{2,2} V = H^{2,2}(T)\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las *clases de Weil*.

Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas.

No obstante, existen d específicos para los que CH es cierta (Schoen, 1988).

Líneas de ataque a la Conjetura de Hodge

Podemos enmarcar en 3 grandes líneas los trabajos que versan sobre la conjetura de Hodge:

- Ejemplos. Se buscan ejemplos de variedades algebraicas para las que se pueda probar la Conjetura de Hodge. En general, la CH se prueba por métodos algebraicos, calculando cuáles son los ciclos de Hodge y probando que todos ellos se pueden realizar por subvariedades algebraicas.
- Construcciones de ciclos algebraicos. Se pretende probar la conjetura de Hodge de forma general construyendo un ciclo algebraico para cada clase de Hodge.
- Búsqueda de contraejemplos. Si asumimos que la CH puede ser falsa, el camino natural es construir un contraejemplo. Aquí la dificultad radica en demostrar que una determinada clase de tipo (p, p) no es representable por subvariedades algebraicas.

Líneas de ataque a la Conjetura de Hodge

Podemos enmarcar en 3 grandes líneas los trabajos que versan sobre la conjetura de Hodge:

- 1 Ejemplos. Se buscan ejemplos de variedades algebraicas para las que se pueda probar la Conjetura de Hodge. En general, la CH se prueba por métodos algebraicos, calculando cuáles son los ciclos de Hodge y probando que todos ellos se pueden realizar por subvariedades algebraicas.
- 2 Construcciones de ciclos algebraicos. Se pretende probar la conjetura de Hodge de forma general construyendo un ciclo algebraico para cada clase de Hodge.
- 3 Búsqueda de contraejemplos. Si asumimos que la CH puede ser falsa, el camino natural es construir un contraejemplo. Aquí la dificultad radica en demostrar que una determinada clase de tipo (p, p) no es representable por subvariedades algebraicas.

Líneas de ataque a la Conjetura de Hodge

Podemos enmarcar en 3 grandes líneas los trabajos que versan sobre la conjetura de Hodge:

- 1 Ejemplos. Se buscan ejemplos de variedades algebraicas para las que se pueda probar la Conjetura de Hodge. En general, la CH se prueba por métodos algebraicos, calculando cuáles son los ciclos de Hodge y probando que todos ellos se pueden realizar por subvariedades algebraicas.
- 2 Construcciones de ciclos algebraicos. Se pretende probar la conjetura de Hodge de forma general construyendo un ciclo algebraico para cada clase de Hodge.
- 3 Búsqueda de contraejemplos. Si asumimos que la CH puede ser falsa, el camino natural es construir un contraejemplo. Aquí la dificultad radica en demostrar que una determinada clase de tipo (p, p) no es representable por subvariedades algebraicas.

Líneas de ataque a la Conjetura de Hodge

Podemos enmarcar en 3 grandes líneas los trabajos que versan sobre la conjetura de Hodge:

- 1 Ejemplos. Se buscan ejemplos de variedades algebraicas para las que se pueda probar la Conjetura de Hodge. En general, la CH se prueba por métodos algebraicos, calculando cuáles son los ciclos de Hodge y probando que todos ellos se pueden realizar por subvariedades algebraicas.
- 2 Construcciones de ciclos algebraicos. Se pretende probar la conjetura de Hodge de forma general construyendo un ciclo algebraico para cada clase de Hodge.
- 3 Búsqueda de contraejemplos. Si asumimos que la CH puede ser falsa, el camino natural es construir un contraejemplo. Aquí la dificultad radica en demostrar que una determinada clase de tipo (p, p) no es representable por subvariedades algebraicas.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

1. Recolección de ejemplos

- Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica ($P^n(\mathbb{C})$, grassmanianas, variedades de bandera, etc).
- Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
- Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo, ...
- Variedades uniregladas, racionales, racionalmente conexas, ...
- Algunas variedades abelianas, Jacobianas, variedades de Prym.
- Usando K -teoría. Functor $\lambda : K_0(\text{Var}) \rightarrow \mathcal{A}$ del anillo de Grothendieck de clases de variedades en cierto grupo abeliano, que nos dice si una variedad satisface CH.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

2. Construcciones de ciclos algebraicos

- Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc).
- Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias.
- Generalización de CH para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
- Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate.
- Ciclos de Hodge absolutos (Deligne) y estudio del Hodge locus.
- Corrientes laminares (Sullivan). Construir corrientes con una estructura “compleja”.

3. Búsqueda de contraejemplos

- Toros de Weil. Variedad abeliana de dimensión 4 con una clase de Hodge $(2, 2)$. No se sabe aún si CH se satisface o no.
- Contraejemplo de Zucker para el caso Kähler (Zucker, Voisin). Extender el contraejemplo para toros Kähler al caso de variedades abelianas.
- Expectaciones de la *mirror symmetry*. La mirror symmetry es una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades complejas} \\ \text{haces coherentes} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades simplécticas} \\ \text{subvariedades lagrangianas} \end{array} \right\}$$

que predice que la CH es falsa.

- Instantones $Spin(7)$ en 8-variedades de Calabi-Yau. Las teorías gauge permiten mirar el problema desde un punto de vista analítico. La condición de ser proyectiva no es relevante.

3. Búsqueda de contraejemplos

- Toros de Weil. Variedad abeliana de dimensión 4 con una clase de Hodge $(2, 2)$. No se sabe aún si CH se satisface o no.
- Contraejemplo de Zucker para el caso Kähler (Zucker, Voisin). Extender el contraejemplo para toros Kähler al caso de variedades abelianas.
- Expectaciones de la *mirror symmetry*. La mirror symmetry es una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades complejas} \\ \text{haces coherentes} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades simplécticas} \\ \text{subvariedades lagrangianas} \end{array} \right\}$$

que predice que la CH es falsa.

- Instantones $Spin(7)$ en 8-variedades de Calabi-Yau. Las teorías gauge permiten mirar el problema desde un punto de vista analítico. La condición de ser proyectiva no es relevante.

3. Búsqueda de contraejemplos

- Toros de Weil. Variedad abeliana de dimensión 4 con una clase de Hodge (2, 2). No se sabe aún si CH se satisface o no.
- Contraejemplo de Zucker para el caso Kähler (Zucker, Voisin). Extender el contraejemplo para toros Kähler al caso de variedades abelianas.
- Expectaciones de la *mirror symmetry*. La mirror symmetry es una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades complejas} \\ \text{haces coherentes} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades simplécticas} \\ \text{subvariedades lagrangianas} \end{array} \right\}$$

que predice que la CH es falsa.

- Instantones $Spin(7)$ en 8-variedades de Calabi-Yau. Las teorías gauge permiten mirar el problema desde un punto de vista analítico. La condición de ser proyectiva no es relevante.

3. Búsqueda de contraejemplos

- Toros de Weil. Variedad abeliana de dimensión 4 con una clase de Hodge $(2, 2)$. No se sabe aún si CH se satisface o no.
- Contraejemplo de Zucker para el caso Kähler (Zucker, Voisin). Extender el contraejemplo para toros Kähler al caso de variedades abelianas.
- Expectaciones de la *mirror symmetry*. La mirror symmetry es una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades complejas} \\ \text{haces coherentes} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades simplécticas} \\ \text{subvariedades lagrangianas} \end{array} \right\}$$

que predice que la CH es falsa.

- Instantones $Spin(7)$ en 8-variedades de Calabi-Yau. Las teorías gauge permiten mirar el problema desde un punto de vista analítico. La condición de ser proyectiva no es relevante.

Comentarios finales

Para probar una conjetura, hemos de hacernos una idea de lo plausible que es. Las esperanzas de los distintos matemáticos dependen mucho de su visión personal.

Grothendieck

This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved!) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the “analytic” theory of algebraic varieties.



Alexander Grothendieck (1928-)

Weil considera que se pone con mucha alegría el apelativo de conjetura a lo que en realidad sólo son preguntas en matemáticas.

Weil

La question que pose la “conjecture de Hodge” est bien naturelle... Par malheur, en dépit du mot de “conjecture”, il n’y a que je sache, pas l’ombre d’une raison d’y croire; on rendrait service aux géomètres si l’on pouvait trancher la question au moyen d’un contre-exemple.



André Weil (1906-1998)