MAITUKU Aloisio
CHARLEY Noel
L2 MATHEMATIQUES

PROJET SCIENTIFIQUE

Sujet choisi :

Exemples et contre-exemples aux séries de fonctions

Problématique :

Que peut-on avoir comme exemples et contre-exemples liés aux séries de fonctions ?????????

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION :

Au début du semestre, nous ne savions pas par où commencer. M.CUNY nous a donné une idée pour débuter notre projet, celle d'étudier le **théorème Sommatoire de Poisson.**
Cette formule relie les valeurs entières d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Pour cela, nous allons tout d'abord montrer une preuve de ce théorème. Ensuite nous parlerons des applications du théorème qui débouchera enfin à une conclusion.

I) DEMONSTRATION DU THEOREME SOMMATOIRE DE POISSON.

1) Théorème de formule Sommatoire de Poisson.

Soient a un réel strictement positif et $\omega_0 = \frac{2\pi}{a}$

Soit F une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ telles que :

- $(H_1)\ \exists c > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{F(x)}| \leq \frac{\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{1}+|\boldsymbol{x}|)^{\boldsymbol{\alpha}}}$
- $(H_2)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{F}(m\omega_0)\right| < +\infty$

Alors $\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+na) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(m\omega_0)e^{im\omega_0 x}$

2) Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+na)$ converge.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+na)$ une série de fonction.
Soit N$\in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=-N}^{N} F(x+na) = \sum_{n=0}^{N} F(x+na) + \sum_{n=-N}^{-1} F(x+na)$$

<u>On prend</u> j=-n

$$\sum_{n=-N}^{N} F(x+na) = \sum_{n=0}^{N} F(x+na) + \sum_{n=1}^{N} F(x-na)$$

D'après (H_1) il existe c>0 et $\alpha > 1$ tel que pour tout $(x,n)\in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$
On a :

$$|F(x+na)| \leq \frac{c}{(1+|x+na|)^{\alpha}}$$

Posons :

$$V_n(x) = \frac{c}{(1+|x+na|)^{\alpha}}$$

Or $V_n(x)(n \widetilde{\longrightarrow +\infty})\ \frac{c}{|na|^\alpha} = \frac{c}{n^\alpha a^\alpha} = \frac{c}{a^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$

D'après le critère de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{c}{a^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$ converge car $\alpha > 1$.
Par équivalence la série $\sum_{n\geq 0} V_n(x)$ converge.
Donc par majoration la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+na)$ converge absolument.

De même,

$$|F(x-na)| \leq \frac{c}{(1+|x-na|)^{\boldsymbol{\alpha}}}$$

Posons :

$$J_n(x) = \frac{c}{(1+|x-na|)^\alpha}$$

Or $J_n(x)(n \widetilde{\longrightarrow +\infty})\ \frac{c}{|-na|^\alpha} = \frac{c}{|n|^\alpha a^\alpha} = \frac{c}{a^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$

D'après le critère de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{c}{a^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$ converge car $\alpha > 1$.
Par équivalence la série $\sum_{n\geq 0} J_n(x)$ converge.
Donc par majoration la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x-na)$ converge absolument.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+na)$ converge sur $\mathbb{R}$

Posons :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+na)$$

3) **Montrons que f est $\boldsymbol{a}$ périodique.**

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+na+a)$$

$$f(x+a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+(1+n)a)$$

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} F(x+(1+n)a) + \sum_{n=-1}^{-\infty} F(x+(1+n)a)$$

On prend j= n+1

$$f(x+a) = \sum_{j=1}^{+\infty} F(x+ja) + \sum_{j=0}^{-\infty} F(x+ja)$$

$$f(x+a)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} F(x+ja)$$

Donc $f(x+a)=f(x)$
Donc f est a_périodique.

4) Montrons que f est continue.

Soit [A,B] compact de $\mathbb{R}$ avec A,B $\in \mathbb{R}$ tel que A<B

D'après (H_1) il existe c>0 et $\alpha>1$ tel que pour tout $(x,n)\in [\mathrm{A},\mathrm{B}]\times\mathbb{Z}$
On a :

$$|F(x+na)|\leq \frac{c}{(1+|x+na|)^{\alpha}}$$

Majorons $\frac{c}{(1+|x+na|)^{\alpha}}$

On a :

$$\mathrm{A}\leq x\leq \mathrm{B}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{A}+na\leq x+na\leq \mathrm{B}+na$$
$$\Rightarrow |x+na|\geq \min(|\mathrm{A}+na|,|\mathrm{B}+na|)$$

Posons : $B_n=\min(|\mathrm{A}+na|,|\mathrm{B}+na|)$

$$|x+na|\geq B_n$$
$$\Leftrightarrow 1+|x+na|\geq 1+B_n$$
$$\Leftrightarrow (1+|x+na|)^{\alpha}\geq (1+B_n)^{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{(1+|x+na|)^{\alpha}}\leq \frac{c}{(1+B_n)^{\alpha}}$$

Soit $P_n=\frac{c}{(1+B_n)^{\alpha}}$

Or $P_n(x)\underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim}\frac{c}{|na|^{\alpha}}=\frac{c}{|n|^{\alpha}a^{\alpha}}=\frac{c}{a^{\alpha}}\frac{1}{|n|^{\alpha}}$ donc elle converge car $\alpha>1$
Par équivalence la série $\sum_{n\geq 0}P_n(x)$ converge.

Or d'après le critère de Weierstrass de convergence normale $\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(x+na)$ converge normalement sur [A,B].

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(x+na)$ converge uniformément sur [A,B].
De plus $\forall n\in\mathbb{Z}$ la fonction $x\mapsto F(x+na)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de convergence uniforme et continuité des séries de fonctions f est continue sur [A, B].
Donc f est continue sur tout compact de $\mathbb{R}$.
De plus f est a_périodique, donc f est continue sur$\mathbb{R}$.

5) Calculons les coefficients de Fourier.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et a_périodique.

Soit m$\in \mathbb{Z}$,

$C_m(f) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)e^{-im\omega_0 t}dt$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\int_0^a \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+na)\, e^{-im\omega_0 t}dt$

$$C_m(f) = \underbrace{\frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^a F(t+na)\, e^{-im\omega_0 t}dt}_{car\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+na)\ converge\ uniformément\ sur\ tout\ compact\ de\ \mathbb{R}}$$

Posons u$=t+na$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{na}^{(1+n)a} F(u)\, e^{-im\omega_0(u-na)}du$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{na}^{(1+n)a} F(u)\, e^{-im\omega_0 u+im\omega_0 na}du$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{na}^{(1+n)a} F(u)\, e^{-im\omega_0 u}e^{im\omega_0 na}du$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{na}^{(1+n)a} F(u)\, e^{-im\omega_0 u}du$ $\boxed{\text{Car } e^{im\omega_0 na} = 1}$

$C_m(f) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{-im\omega_0 u}du$

Donc

$$C_m(f) = \frac{1}{a}\,\tilde{F}(m\omega_0)$$

Par suite,

$\left|C_m(f)e^{im\omega_0 x}\right| = |C_m(f)|\,\left|e^{im\omega_0 x}\right| \leq |C_m(f)|$

Or $|C_m(f)| = |\frac{1}{a}\,\tilde{F}(m\omega_0)|$

D'après(H_2), la série $\sum C_m(f)e^{im\omega_0 x}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$

Notons :

$$S(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m(f)e^{im\omega_0 x}$$

On peut en déduire que
La fonction a les mêmes coefficients de Fourier que f et est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$.

On a donc

$$f = S$$

Autrement dit f est somme de sa série de Fourier.

$$\frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(m\omega_0)e^{im\omega_0 x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(x+na)$$

II) APPLICATION DE LA FORMULE

D'après le théorème Sommatoire de Poisson, évaluons la formule en $\boldsymbol{x=0}$, on obtient la formule suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(na)=\frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(n\omega_0)\quad(*)$$

La formule Sommatoire de Poisson nous permet de donner un exemple et contre-exemple du théorème de convergence uniforme et limite des séries de fonctions.

Pour cela, considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$.

1) Intégrabilité de g

g est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$ donc il suffit d'étudier son intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

$g(x)=\theta(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x\to+\infty$

Donc g est intégrable sur $[a,+\infty[$ $(a>0)$.

Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Transformée de Fourier de g

Soit $p\in\mathbb{C}$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt+\int_0^{+\infty}g(t)e^{pt}dt$$

Remarquons que :

$$\int_0^{+\infty}g(t)e^{pt}dt=\int_0^{+\infty}g(t)e^{2pt}e^{-pt}dt$$

Or

$|g(t)|=e^{\frac{-x^2}{2}}\leq 1,\forall t\geq 0$,donc son abscisse de convergence est inférieure à 0.

$|g(t)e^{2p}|=e^{Re(p)}e^{\frac{-x^2}{2}}\leq\ e^{Re(p)},\forall t\geq 0$,donc son abscisse de convergence est inférieur à 0.

Au total g admet une abscisse de convergence inférieur à 0 et l'intégrale converge pour $p=0$ car elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, l'intégrale converge pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $Re(p) = 0$ (i.e sa transformée de Fourier definie par $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}dt$ est bien définie (converge)).

3) Calcul de $\hat{g}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(t)e^{-ixt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(t)e^{-ixt}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

  et $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(g(t)e^{-ixt}\right) = -itg(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a : $|-itg(t)e^{-ixt}| \leq |t|g(t)$ or la fonction $t \mapsto |t|g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En effet, elle est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$ et $|t|g(t) = \theta(\frac{1}{t^3})$ quand $t \to +\infty$.

Donc d'après le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$:

$\hat{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}\left(\hat{g}(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}dt.$

Soit $A > 0$
Effectuons une intégration par partie.

On a alors :

$$\int_{-A}^{A} -ite^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}dt = i([e^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}]_{-A}^{A} + ix\int_{-A}^{A} e^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}dt)$$

Or

$$[e^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}]_{-A}^{A} = e^{\frac{-A^2}{2}}\underbrace{\sin(Ax)}_{bornée} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

$\frac{d}{dx}\left(\hat{g}(x)\right) = -x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}e^{-ixt}dt = -x\hat{g}(x) \quad (E)$

(E) est une équation différentielle d'ordre 1 et homogène, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \hat{g}(x) = Ke^{\frac{-x^2}{2}}$

Evaluons $\hat{g}$ en $x = 0$ donc $K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

Montrons que $\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Considérons $F(x) = (\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}}{(1+t^2)}dt.$

- La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ est dérivable sur [0 ;+∞[et donc F l'est aussi car la fonction $u \mapsto u^2$ est dérivable sur [0 ;+∞[et $\forall x \geq 0$

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = 2e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

- G est dérivable sur $\mathbb{R}$
En effet,

  - ✓ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}}{(1+t^2)}$ est continue et intégrable sur [0 ;1].
  - ✓ Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}}{(1+t^2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

    Et $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{e^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}}{(1+t^2)}\right) = -xe^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  - ✓ Soit K un segment d'intervalle de $\mathbb{R}$, on a :$\forall (x,t) \in K \times [0;1]$, $|-xe^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)}| \leq Sup_{x\in K}(|x|e^{\frac{-x^2}{2}})$.

Or la fonction majorant constante est intégrable sur [0 ;1] car elle est continue sur [0 ;1].

D'où la justification de dérivabilité de G. (*par le théorème de la dérivabilité sous le signe intégrale).*

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}(G(x)) = \int_0^1 -xe^{\frac{-x^2}{2}(1+t^2)} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(G(x)) = -e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^1 xe^{\frac{-(xt)^2}{2}} dt$$

Par un changement de variable $u = xt$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(G(x)) = -e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{-(u)^2}{2}} du$$

Donc $\forall x \geq 0$ $\frac{d}{dx}(F(x)) = -2\frac{d}{dx}(G(x))$.

Donc $\forall x \geq 0$ $\frac{d}{dx}(F(x) + 2G(x)) = 0$

Donc $F(x) + 2G(x) = cst$ $\forall x \geq 0$

Donc $cst = F(0) + 2G(0) = 2G(0) = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{F(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ car $|G(x)| \leq \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dt = e^{\frac{-x^2}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$..

Revenant à notre constante$K$, on en déduit que $K = \sqrt{2\pi}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Tous les calculs précédents nous permettent simplement de calculer la transformée de Fourier de g.

Avant d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à g, vérifions que :

- (H_1) Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} |g(x)(1+|x|)^\alpha = 0$
  Donc la fonction $x \mapsto |g(x)|(1+|x|)^\alpha$ est bornée donc il existe $c > 0$ tel que $|g(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^\alpha}$

- (H_2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n\omega_0)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi} e^{\frac{2\pi^2 n^2}{a^2}} + \sum_{n\geq 1} \sqrt{2\pi} e^{\frac{-2\pi^2 n^2}{a^2}}$

  Or $n^2\sqrt{2\pi} e^{\frac{-2\pi^2 n^2}{a^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc les deux série convergent donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n\omega_0)|$ converge.

Donc d'après la formule Sommatoire de Poisson de $(*)$, on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-a^2 n^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-2\pi^2 n^2}{a^2}} \qquad (**)$$

Posons (a_n) et (b_n) deux suites de fonctions de]0 ;+∞[définies par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} a_n(x) = e^{\frac{-x^2 n^2}{2}} \\ b_n(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2 n^2}{x^2}} \end{cases}$

4) La convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, les fonctions a_n sont décroissantes sur]0 ;+∞[.

- Soit $A > 0$
  $\forall x \in [A; +\infty[, |a_{n(x)}| \leq e^{\frac{A^2 n^2}{2}} = u_n$ et la série de terme générale (u_n) converge car $n^2 u_n \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$
  Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge normalement sur $[A; +\infty[$.

5) La nature de la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$

- Il est clair que la série converge et notons (R_n) sa suite reste définie par :

$$R_n(x) = \sum_{k=-(n+1)}^{+\infty} b_k(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Donc $R_n(x) = 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

- Posons $x_n = A + n$, une suite de [A ;+∞[

$$|R_n(x)| = 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k(x) \geq 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2 n^2}{x^2}} \geq 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2 (n+1)^2}{x^2}}$$

Donc $|R_n(x)| \geq \frac{2n\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2 (n+1)^2}{x^2}}$

Donc

$$|R_n(x_n)| = \frac{2n\sqrt{2\pi}}{A+n} e^{\frac{-2\pi^2(n+1)^2}{(A+n)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2} > 0$$

Donc $Sup_{x\in[A\,;+\infty[}|R_n(x)|$ ne tend pas vers 0. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$ ne converge pas uniformément sur [A ;+∞[.

Appliquant le théorème de convergence uniforme et la limite des séries de fonctions à la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2n^2}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-x^2n^2}{2}} = 0 \qquad (i)$$

D'après $(**)$

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{x} e^{\frac{-2\pi^2n^2}{x^2}} = 0$$

Or $e^{\frac{-2\pi^2n^2}{x^2}}\, x \widetilde{\to +}\infty\ 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2n^2}{x^2}} = 0$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2n^2}{x^2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{\frac{-2\pi^2n^2}{x^2}} = 0 \qquad (ii)$$

Finalement (i) donne un exemple sur le théorème de convergence uniforme et limite des séries de fonctions et (ii) montre qu'on ne peut pas toujours avoir la convergence uniforme pour que le résultat soit vrai, autrement dit les hypothèses du théorème sont des conditions nécessaires et non pas suffisantes.

III) CONCLUSION