SESSION 2002

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines - Cachan

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE I

Que les candidats ayant travaillé sur le sujet de la session 2001 ne soient pas surpris: ils ont effectivement rencontré le problème dont il est question ici, à savoir la recherche des solutions $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$. Mais la démarche est complètement indépendante de la précédente; même la connaissance précise des solutions n'apporte rien au déroulement du raisonnement. Il conviendra donc, pour ceux qui auraient quelques souvenirs, de s'en détacher, et d'aborder l'exercice avec un esprit libre.

partie I

Soit G une partie de $\mathbf{R}$ contenant strictement $\{0\}$, et qui est un groupe pour la loi $+$.

1. Montrer que l'ensemble $G \cap \mathbf{R}_+^*$ est non vide, et justifier l'existence de $a = \inf G \cap \mathbf{R}_+^*$. Peut-on avoir $a = 0$?

   La fin de cette partie consiste à montrer que, si $a > 0$, alors G est l'ensemble $a\mathbf{Z}$ des réels de la forme ak avec $k \in \mathbf{Z}$. On se place donc dans le cas $a > 0$, et on admet (c'est une propriété générale sous les hypothèses précédentes) que a appartient à G.

2. Montrer que $a\mathbf{Z}$ est inclus dans G.

3. Soit maintenant $x \in G$.

   (a) Prouver l'existence d'un $n \in \mathbf{Z}$ tel que $na \leq x < (n+1)a$.

   (b) Montrer que $x - na$ est dans $G \cap \mathbf{R}_+$, puis que ce réel est nul.

   (c) Déduire de ce qui précède l'inclusion $G \subset a\mathbf{Z}$.

4. Conclure

partie II

Soit $H = \{x + y\sqrt{3}\,,\ (x, y) \in \mathbf{Z}^2\,,\ x^2 - 3y^2 = 1\} \cap \mathbf{R}_+^*$.

1. On désigne par ln le logarithme népérien. Montrer que 1 appartient à H, et que $G = \{\ln h\,,\ h \in H\}$ est un groupe pour la loi $+$, non réduit à $\{0\}$.

2. En admettant que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, montrer que si les couples $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ et $(x', y') \in \mathbf{Z}^2$ vérifient $x + y\sqrt{3} = x' + y'\sqrt{3}$, alors ils sont égaux.

3. Montrer que si $x+y\sqrt{3} \in H$ et $x+y\sqrt{3} > 1$, alors $x \geq 2$ et $y \geq 1$.

4. Calculer $\inf H \cap]1,+\infty[$, puis $\inf G \cap \mathbf{R}_+^*$.

5. Prouver que $H = \{(2+\sqrt{3})^n \,,\, n \in \mathbf{Z}\}$.

6. Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.

EXERCICE II

Un dispositif de comptage dénombre les visiteurs qui entrent dans un musée. On note $X_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la variable aléatoire X_n qui donne le nombre de visiteurs ayant passé le portail entre les instants 0 et n. On se place dans le cas où les variables sont telles que pour tous entiers $0 \leq m \leq n$, X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes, et $X_n - X_m$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(n-m)$ (α est un réel strictement positif donné). Soient $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, avec $0 \leq m \leq n$.

1. Calculer $E(X_m(X_n - X_m))$, puis la covariance des variables aléatoires X_m et X_n.

2. Quelle est la loi du couple (X_m, X_n)?

3. Pour $n \neq 0$, on pose $p = \frac{m}{n}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, calculer la loi de probabilité de X_m sachant que $X_n = k$, puis identifier cette loi.

4. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier $n > 0$ tel qu'il soit entré au moins un visiteur entre les instants 0 et n. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer l'évènement $(N = n)$ en fonction de X_{n-1} et X_n , puis déterminer la loi de N, son espérance, sa variance.

PROBLEME

partie I

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables (en 0 et 1 , il s'agit de la dérivabilité respectivement à droite et à gauche) vérifiant l'équation $f'' + \lambda f = 0$ sur l'intervalle $[0,1]$ ($\lambda \in \mathbf{R}$ est donné), et θ l'application $\mathcal{E} \to \mathbf{R}^2 : f \mapsto (f(0), f'(0))$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et θ une application linéaire.

Tournez la page S.V.P.

2. Etudier les variations des fonctions ch et sh définies sur $\mathbf{R}$ à partir de la fonction exponentielle par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad , \quad \operatorname{ch} x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2} \quad , \quad \operatorname{sh} x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}$$

On exprimera la dérivée, et on dressera un tableau pour chacune de ces fonctions.

3. (a) Pour $\lambda \neq 0$, on note f_λ, g_λ les fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_\lambda(x) = \operatorname{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) ; g_\lambda(x) = \operatorname{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) \text{ si } \lambda < 0,$$

$$f_\lambda(x) = \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) ; g_\lambda(x) = \sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) \text{ si } \lambda > 0.$$

Montrer que la famille (f_λ, g_λ) est une famille libre de $\mathcal{E}$.

(b) L'hypothèse est, ici, $\lambda < 0$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la fonction $f f_\lambda' - f' f_\lambda$ est constante. En déduire l'injectivité de l'application θ (on pourra étudier, après avoir remarqué que f_λ ne s'annule pas, la fonction $\frac{f}{f_\lambda}$ pour $f \in \ker\theta$).

(c) On se place dans le cas $\lambda > 0$. Pour $f \in \mathcal{E}$, étudier la fonction $f'^2 + \lambda f^2$. En déduire l'injectivité de l'application θ.

(d) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$ dans le cas $\lambda \neq 0$? Donner une base de cet ensemble.

4. Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque $\lambda = 0$. On précisera la dimension et une base de cet ensemble.

partie II

Pour $g \in C([0,1], \mathbf{R})$, on note $\mathcal{P}_g$ le problème $f'' - f = g$; $f'(0) = f'(1) = 0$ d'inconnue f, fonction définie et deux fois dérivable sur $[0,1]$. D'autre part, on définit $\|\ \ \|$ par:

$$\forall f \in C([0,1], \mathbf{R}), \quad \| f \| = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, dt}.$$

On admet les propriétés suivantes de l'application $\|\ \ \|$:

$$\forall f, g \in C([0,1], \mathbf{R}), \quad \int_0^1 | f(t)\, g(t) |\, dt \leq \| f \| \| g \| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)},$$

$$\forall f, g \in C([0,1], \mathbf{R}), \quad \| f + g \| \leq \| f \| + \| g \| \quad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

1. Soient $g \in C([0,1], \mathbf{R})$ et f solution de $\mathcal{P}_g$.

(a) On pose $h = f' + f$. Calculer $\left(\frac{h}{\exp}\right)'$ et en déduire la forme générale de h.

(b) Calculer $(f\exp)'$, et en déduire la forme générale de f.

(c) Montrer l'égalité suivante:

$$\forall x \in [0,1]\,, \quad f(x) = -\int_0^x \frac{\operatorname{ch} t\, \operatorname{ch}(1-x)}{\operatorname{sh} 1}\, g(t)\, dt - \int_x^1 \frac{\operatorname{ch} x\, \operatorname{ch}(1-t)}{\operatorname{sh} 1}\, g(t)\, dt$$

2. Réciproquement, montrer que pour tout $g \in C([0,1], \mathbf{R})$, la fonction f définie par la formule précédente est solution du problème $\mathcal{P}_g$.

3. Si k est une fonction continue sur $[0,1]\times[0,1]$, à valeurs réelles, on note A_k l'application définie sur $C([0,1]\,, \mathbf{R})$ par

$$\forall g \in C([0,1]\,, \mathbf{R}), \forall x \in [0,1]\,, A_k g(x) = \int_0^1 k(x,t)\, g(t)\, dt.$$

(a) A l'aide des questions 1. et 2. , prouver qu'il existe une fonction $k \in C([0,1] \times [0,1]\,, \mathbf{R})$ telle que, pour $f, g \in C([0,1]\,, \mathbf{R})$, f est solution de $\mathcal{P}_g$ si et seulement si $A_k g = f$. La fonction k est désormais fixée et on note A pour A_k.

(b) Montrer que A est une application linéaire injective. Est-ce un endomorphisme surjectif de $C([0,1]\,, \mathbf{R})$?

(c) On note I l'application identité de $C([0,1]\,, \mathbf{R})$ dans lui-même. Un nombre réel λ est dit valeur propre de A si l'ensemble $\ker(A - \lambda I)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Cet ensemble est alors l'espace propre associé à la valeur propre λ, et ses éléments non nuls sont les fonctions propres de A associées à la valeur propre λ. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chacune d'elles, une base de l'espace propre correspondant.

4. On admet que pour toute fonction $f \in C([0,1]\,, \mathbf{R})$, il existe une suite $(\alpha_j^f)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad \| \, f - \sum_{0\leq j \leq n} \alpha_j^f \, \cos(j\pi.) \, \| < \epsilon.$$

où $\cos(j\pi.)$ désigne la fonction : $t \in [0,1] \mapsto \cos(j\pi t)$.

(a) Calculer $\int_0^1 \cos(j\pi t)\cos(k\pi t)\, dt$ pour $j, k \in \mathbf{N}$.

(b) Pour $f \in C([0,1]\,, \mathbf{R})$, déterminer une expression intégrale des $\alpha_j^f, j \in \mathbf{N}$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

5. (a) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, donner, sans le moindre calcul, la valeur de $\int_0^1 k(x,t)\cos(n\pi t)\, dt$.

Tournez la page S.V.P.

(b) Soit $x \in [0,1]$. En appliquant la propriété de la question 4. à la fonction $k(x,.)$: $t \mapsto k(x,t)$, déterminer les coefficients $\alpha_j(x)$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \| k(x,.) - \sum_{0\leq j\leq n} \alpha_j(x) \cos(j\pi .) \| = 0.$$

6. Montrer que pour tout couple $(x,t) \in [0,1]\times[0,1]$ la série

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{-2}{1+n^2\pi^2} \cos(n\pi x)\cos(n\pi t)$$

converge, et que sa somme $\varphi(x,t)$ vérifie

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times[0,1],\ \left| \varphi(x,t) + \sum_{0\leq j\leq n} \frac{2}{1+j^2\pi^2} \cos(j\pi x)\cos(j\pi t) \right| \leq \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{\pi n}.$$

7. On admet que les propriétés prouvées en 6. donnent la continuité de φ sur $[0,1]\times[0,1]$. Montrer l'égalité des fonctions φ et k sur $[0,1]\times[0,1]$.

8. Calculer

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{1+n^2\pi^2}$$

et montrer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 k(x,t)^2\, dx \right) dt = \sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{1}{1+n^2\pi^2} \right)^2$$