Méthode à partir de la série harmoique.

Cette méthode a été exposée par Peter Shiu, un mathématicien anglais, en 1974 dans la revue anglaise **Mathematical Gazette** elle repose sur la même idée de fond que la méthode des suites de Cauchy, mais en privilégiant certaines suites particulières.

La construction de Peter Shiu est basée sur le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :*

❶ $a_n > a_{n+1} > 0$

❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

❸ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, il existe une sous-suite (nous noterons ψ la fonction extractrice) de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{\psi(i)}\right) = x$, ce que nous noterons $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{\psi(i)} = x$

Démonstration : Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions ci-dessus :

Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$,

$\psi(0) = \min\limits_{n}\{n \,|\, a_n < x\}$ (qui existe grâce à la propriété ❸ et qui correspond à la plus grand possible de a_n grâce à la propriété ❶) on pose $u_0 = a_{\psi(0)}$

$\psi(i+1) = \min\limits_{n}\left\{n\,\middle|\, \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_{\psi(j)} + a_n < x\right\}$ (qui existe grâce à la propriété ❸ et puisque $x - \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_{\psi(j)} > 0$, et qui correspond à la plus grand possible de a_n grâce à la propriété ❶) et on pose $u_{i+1} = a_{\psi(i+1)}$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$ est croissante et bornée par x, par construction, elle admet donc une limite inférieure ou égale à x.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$; si ℓ était différent de x, alors $\ell < x$, on pourrait poser $\eta = x - \ell > 0$; si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaissaient dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait divergente (propriété ❷), donc il existe N tel que :

- $a_N < \eta$
- $S_{N-1} < \ell$
- $\ell \leq S_{N-1} + a_N < x$

Mais avec ces propriétés, a_N aurait été pris dans la construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne peut donc pas converger vers ℓ, finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = x$.

Pour tout $A \subset \mathbb{N}^\star$, un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ (c'est à dire $|A| = \aleph_0$), il existe une bijection *croissante* $\psi_A : \mathbb{N} \to A$, ce qui autorise à noter $A = \{\psi_A(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ou, en posant $a_n = \psi_A(n)$, $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, où $a_{n+1} > a_n$. Nous noterons $\displaystyle\sum_{a_i\in A}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} \psi_A(i))$. C'est à dire qu'à chaque $A \subset \mathbb{N}^\star$, infini on peut faire correspondre une sous-suite extraite d'une suite donnée.

Si A est tel que la série associée à ses inverses est divergente, c'est à dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ (nous dirons que cet ensemble A possède la propriété de divergence), soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ constitué des sous-ensembles X de $\mathbb{N}$, infinis et tels que la suite rationnelle définie par $X_n = \displaystyle\sum_{x_i\in X}^{n} \frac{1}{x_i}$ est bornée.

Soit $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$, la relation $\sim$ définie par : $X \sim Y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{\psi_X(i)} - \frac{1}{\psi_Y(i)} \right) = 0$, est une relation d'équivalence, dont les classes seront notées σ_X et appelées nombres réels.

Deux ensembles particuliers, entre autres, possèdent cette propriété : $\mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Si l'ensemble A possède la propriété de divergence et si $X \subset A$ ne la possède pas, alors $A \setminus X$ possède la propriété de divergence.

Soit $X \in \mathcal{A}$ et et $Y \in \mathcal{A}$

- Il existe un sous-ensemble $X_p \subset \mathbb{P}$ tel que $(X_p \in \mathcal{A}) \wedge (\sigma_X = \sigma_{X_p})$.
- $\mathbb{P} \setminus X_p$ possèdent toujours la propriété de divergence.
- Il existe $Y_p \subset (\mathbb{P} \setminus X_p)$ tel que $(Y_p \in \mathcal{A}) \wedge (\sigma_Y = \sigma_{Y_p})$.
- On définit l'addition des réels par : $\sigma_X + \sigma_Y = \sigma_{X_p \cup Y_p}$ (l'union étant disjointe, puisque $X_p \cap Y_p = \varnothing$, tous les termes de la somme sont de la forme $\frac{1}{n}$).
- On définit la multiplication des réels par : $\sigma_X \times \sigma_Y = \sigma_{X_p Y_p}$ (il n'y a qu'une seule façon d'obtenir un élément de $X_p Y_p$ [1] puisque ce sont deux ensembles disjoints de nombres premiers, et donc tous les termes de la somme sont de la forme $\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{n}$).
- On définit l'ordre sur les réels par : $(\sigma_X \leq \sigma_Y) \Leftrightarrow \exists X' \, \exists Y' ((\sigma_{X'} = \sigma_X) \wedge (\sigma_{Y'} = \sigma_Y) \wedge (X' \subseteq Y'))$

L'ensemble $(\mathcal{A}/\sim, +, \times, \leq)$, muni des opérations et de la relation d'ordre définies ci-dessus est isomorphe au corps ordonné des réels.

1. P. Shiu, *A new construction of the real numbers*, Mathematical Gazette Volume 58, N° 403, pages 39-46, Londres, UK, 1974.
2. I. Weiss, *The real numbers - a survey of constructions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 45, N° 3, pages, 737-762, Arizona, 2015.

1. $X_p Y_p = \{xy \,|\, (x \in X_p) \wedge (y \in Y_p)\}$.