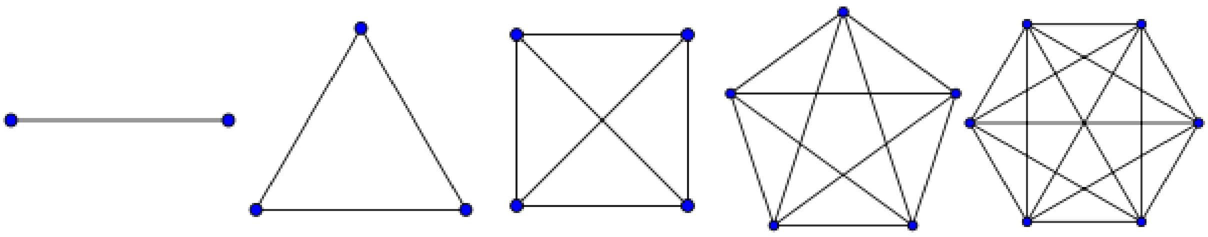
Enoncé :

Formule explicite pour le nombre de chemins entre deux points dans K_n (graphe complet à n points) sans repasser par un même point.



K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Proposition :

On note $(P_1, P_2, \ldots, P_\alpha)$ un chemin ayant pour point de départ P_1 et pour point d'arrivée P_α et $P_2, P_3, \ldots$ des points intermédiaires.

On notera toujours pour un chemin :

A le point de départ

Z le point d'arrivée

P_i les points intermédiaires ($i \in \mathbb{N}^*$)

On note α_n le nombre de chemins entre deux points A et B sans repasser deux fois par le même point dans K_n.

On se propose de déterminer α_n.

On trouve une formule « expérimentale » pour α_n sur les premiers exemples de graphes complets.

On énumère les chemins :

K_2	K_3
(A, Z) (chemin direct)	(A, Z) (chemin direct)
	(A, P_1, Z) (chemin à un point intermédiaire)
$\alpha_2 = 1$	$\alpha_3 = 2$

K_4	K_5
(A,Z)	(A,Z)
(A,P_1,Z)	(A,P_1,Z)
(A,P_2,Z)	(A,P_2,Z)
(A,P_1,P_2,Z)	(A,P_3,Z)
(A,P_2,P_1,Z)	(A,P_1,P_2,Z)
	(A,P_2,P_1,Z)
	(A,P_1,P_3,Z)
	(A,P_3,P_1,Z)
	(A,P_2,P_3,Z)
	(A,P_3,P_2,Z)
	(A,P_1,P_2,P_3,Z)
	(A,P_1,P_3,P_2,Z)
	(A,P_2,P_1,P_3,Z)
	(A,P_2,P_3,P_1,Z)
	(A,P_3,P_1,P_2,Z)
	(A,P_3,P_2,P_1,Z)
$\alpha_4 = 5$	$\alpha_5 = 16$

Proposition

On voit bien que à chaque fois il y a le chemin direct

Que il y a $n-2$ chemins à un point

Et finalement les autres chemins se calculent à l'aide de coefficients binomiaux (nombre de manières de réagencer k éléments dans un ensemble à n éléments), finalement je trouve que :

$$\alpha_n = 1 + (n-2) + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n-k}{n-k-2} (n-2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n-k}{n-k-2} (n-2)$$

Donc :

$$\alpha_n = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n-k}{2} (n-2)$$

$$\alpha_n = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(n-k)!}{2(n-k-2)!} (n-2)$$

Or :

$$\frac{(n-k)!}{(n-k-2)!} = \frac{(n-k-2)!\,(n-k-1)(n-k)}{(n-k-2)!} = (n-k-1)(n-k)$$

Donc :

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-2} (n-k-1)(n-k)(n-2)$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[(n-2)\sum_{k=2}^{n-2} k^2 + (-2n^2+5n-2)\sum_{k=2}^{n-2} k + \sum_{k=2}^{n-2} n^3 - 3n^2 + 2n\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[(n-2)\left(\frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6} - 1\right) + (-2n^2+5n-2)\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1\right) \right.$$
$$\left. + (n-3)(n^3-3n^2+2n)\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[(n-2)\left(\frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6} - 1\right) + (-2n^2+5n-2)\left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}\right) + (n-3)(n^3-3n^2+2n)\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[(n-2)\left(\frac{2n^3-9n^2+13n-12}{6}\right) - n^4 + \frac{11n^3}{2} - \frac{17n^2}{2} + 3n + n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[(n-2)\left(\frac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 12}{6}\right) - \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2} - 3n\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{n^4}{3} - \frac{13n^3}{6} + \frac{31n^2}{6} - \frac{19n}{3} + 4 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2} - 3n\right]$$

$$\alpha_n = (n-1) + \frac{1}{6}[n^4 - 8n^3 + 23n^2 - 28n + 12]$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{n^4}{6} - \frac{4n^3}{3} + \frac{23n^2}{6} - \frac{11n}{3} + 1}$$