

Quelques résultats de théorie des modèles en logique classique du premier ordre

Médiat

Septembre 2007

Introduction

La théorie des modèles est une partie de la logique mathématique (nous ne parlerons ici que de logique classique du premier ordre avec égalité), qui se préoccupe de sémantique, c'est à dire de l'interprétation d'une théorie dans une structure, c'est donc une partie des mathématiques où le mot " vrai " (même s'il ne s'agit pas de vérité universelle) a du sens, contrairement à l'étude pure des théories où ce vocabulaire est dangereux.

Avant de pouvoir parler de modèle, il faut disposer d'un langage, qui peut contenir des symboles de constantes, de relations, de fonctions. Le langage sera noté $\mathcal{L}$, et sauf mention du contraire ce sera un langage fini ou dénombrable.

Un modèle (intuitivement : un " Monde possible ") du langage $\mathcal{L}$ est un couple $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$, où A est un ensemble, et $\mathcal{I}$ une fonction d'interprétation qui à chaque constante de $\mathcal{L}$ fait correspondre un élément de A , à chaque relation n -aire de $\mathcal{L}$ fait correspondre une relation $R \subset A^n$, et à chaque fonction m -aire fait correspondre une fonction de $A^m \longrightarrow A$.

Quelques théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (de complétude) *Une théorie $\mathcal{T}$ est consistante si et seulement si elle a un modèle.*

Théorème 2 (de compacité) *Une théorie $\mathcal{T}$ est consistante si et seulement si toute partie finie de $\mathcal{T}$ est consistante.*

Théorème 3 (de Löwenheim-Skolem) *Si une théorie $\mathcal{T}$ admet des modèles finis aussi grands que l'on veut ou un modèle infini, alors elle admet un modèle de n'importe quel cardinal supérieur ou égal au cardinal du langage $\mathcal{L}$.*

Théorème 4 (de Morley) *Une théorie catégorique en un cardinal non dénombrable est catégorique en tous les cardinaux non dénombrables. (une théorie est catégorique en un cardinal si elle n'a qu'un seul modèle à isomorphisme près dans ce cardinal)*

Les démonstrations complètes et formelles de ces quatre théorèmes dépassent largement le cadre de cette présentation.

Démonstration " naïve " du théorème de compacité

Dans un sens ce théorème est trivial, nous allons montrer l'autre sens par l'absurde. Supposons que la théorie $\mathcal{T}$ est contradictoire, c'est à dire qu'il existe une démonstration de " Faux " à partir de $\mathcal{T}$, mais une démonstration est un processus fini qui ne peut donc mettre en jeu qu'une partie finie de $\mathcal{T}$, cette partie finie est donc contradictoire. J'ai baptisé cette démonstration " naïve ", car elle est loin d'être formelle, mais une démonstration formelle est hors du champ de cette petite présentation.

Démonstration d'une partie du théorème de Löwenheim-Skolem

La partie que nous allons démontrer est " Si une théorie admet des modèles finis aussi grands que l'on veut, elle admet un modèle infini. "

Soit $\mathcal{T}$ une théorie admettant des modèles finis arbitrairement grands. Soit a_i un ensemble dénombrable de symboles de constantes différentes des constantes de $\mathcal{T}$, et σ_{ij} l'axiome $(a_i \neq a_j)$. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie $\mathcal{T}$ à laquelle on adjoint tous les σ_{ij} pour $i \neq j$. Toutes les parties finies de $\mathcal{T}'$ ne contiennent qu'un nombre fini d'axiomes σ_{ij} et donc, par hypothèse, admettent des modèles, par le théorème de compacité $\mathcal{T}$ est consistante, et par le théorème de complétude elle admet un modèle, qui est forcément infini pour pouvoir interpréter toutes les constantes et vérifier tous les axiomes σ_{ij} (La démonstration complète du théorème est basée sur la même idée).

Quelques applications

Théorème 5 *La théorie des ordres totaux denses et sans extremums est ω -catégorique, mais non catégorique dans les autres cardinaux.*

Soit $(A, \leq)$ et $(B, \preceq)$ deux modèles dénombrables de la théorie des ordres denses sans extremums, ces modèles étant dénombrable, on peut énumérer leurs éléments (a_i) pour A et (b_i) pour B . Soit $f : A \rightarrow B$ la fonction définie de la façon suivante : $f(a_0) = b_0$; si $b_1 \prec b_0$ on choisit un $a_{i_1} < a_0$ (il en existe puisque l'ordre est sans extremums) si au contraire $b_1 \succ b_0$ on choisit un $a_{i_1} > a_0$ et on pose $f(a_{i_1}) = b_1$.

Soit a_{i_2} l'élément de A différent de a_0 et a_{i_1} , et le plus petit dans l'ordre de l'énumération (qui est un ordre discret) et en fonction de sa position par rapport aux éléments de A déjà pris en compte on choisit un élément b_{i_2} dans la même position par rapport aux éléments de B déjà pris en compte, ceci est toujours possible soit en invoquant l'absence d'extremums, soit en invoquant la densité. Ensuite on recommence en partant alternativement de B puis de A puis de B etc. Par construction, f est bijective (la surjection est assurée par le processus de va-et-vient) et croissante, c'est donc bien un isomorphisme (cqfd).

Par contre $(\mathbb{R}, \leq)$ et $(\mathbb{R}^*, \leq)$ ne sont pas isomorphes (théorème de la borne supérieure vrai dans l'un et pas dans l'autre). Grace au théorème de Morley, il est inutile d'étudier d'autres cardinaux que $\aleph_1$. Ceci est un exemple de deux structures élémentairement équivalentes (qui vérifient les mêmes formules du premier ordre) et non isomorphes.

Théorème 6 *La théorie des groupes finis n'est pas une théorie du premier ordre.*

Si la théorie des groupes finis était une théorie du premier ordre elle vérifierait le théorème de Löwenheim Skolem, et comme elle admet des modèles finis arbitrairement grands, elle aurait un modèle infini, ce qui n'est pas vraiment acceptable pour des groupes finis. Cet exemple est évidemment généralisable à plein de structures : corps finis, ordres finis etc.

Théorème 7 *Une proposition du langage des corps, vraie dans tous les corps de caractéristique 0 est vraie dans tous les corps de caractéristique assez grande.*

Soit $\mathcal{T}$ la théorie des corps, la théorie $\mathcal{T}'$ obtenue en adjoignant à $\mathcal{T}$ les axiomes $\sigma_p = (p.1 \neq 0)$ avec p premier, $\mathcal{T}'$ est alors la théorie des corps de caractéristique 0.

Si la formule ϕ est vraie dans tous les modèle de $\mathcal{T}'$, c'est que $\mathcal{T}'$ démontre ϕ , (ce qui peut s'écrire : $\mathcal{T} \vdash \phi$). Par le théorème de compacité il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{T}'$ qui démontre ϕ , $\mathcal{F}$ étant fini, il existe un plus petit entier q tel que σ_q n'est pas dans $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est inclus dans la théorie $\mathcal{F}'$ égal à $\mathcal{T}$ à laquelle on adjoint les axiomes σ_p pour $p < q$.

Si K est un corps de caractéristique supérieure ou égale à q , c'est un modèle de $\mathcal{F}'$, et comme $\mathcal{F}' \vdash \phi$, alors K est un modèle de ϕ .

Je ne connais pas suffisamment l'algèbre des corps pour être péremptoire, mais je crois que démontrer ce résultat par des moyens purement algébriques ne doit pas être si simple...

Théorème 8 *Il existe des entiers (théorie axiomatique de Peano) non standards.*

Première justification

Le théorème de Löwenheim-Skolem permet d'affirmer que la théorie axiomatique de Péano qui admet un modèle dénombrable admet des modèles en toutes cardinalités, ces modèles sont clairement non standards.

Deuxième justification

L'appel à des modèles de cardinalité supérieur n'est pas très fair-play, alors voici un autre exemple.

Soit α un nouveau symbole de constante et σ_i l'axiome (α est divisible par i) (c'est un petit exercice de montrer que cet axiome est bien du premier ordre).

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant tous les axiomes σ_i pour tous les entiers à l'axiomatique de Peano.

Toutes les parties finies de $\mathcal{T}'$ sont consistantes puisque $\mathbb{N}$ est un modèle de cette partie finie avec $n!$ pour interpréter α où n est le plus grand entier apparaissant dans les σ_i de cette partie finie, donc, par compacité $\mathcal{T}'$ est consistante, par complétude elle admet un modèle dans lequel il existe un élément qui est divisible par tous les nombres entiers (standards). Étonnant, non !

Théorème 9 *Il existe un corps ordonné non archimédien vérifiant les mêmes formules du premier ordre que le corps ordonné des réels (ils sont élémentairement équivalents).*

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des formules vraies dans le corps ordonné des réels.

Soit α un symbole de constante et σ_i l'axiome ($i.1 < \alpha$)

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant à $\mathcal{T}$ les axiomes σ_i pour tous les entiers i . Il est clair que par compacité cette théorie est consistante ($\mathbb{R}$ est un modèle de chaque partie finie), elle admet donc un modèle, qui vérifie bien toutes les formules du premier ordre vérifiées dans $\mathbb{R}$, mais qui n'est pas archimédien, à cause de α (comme conséquence on peut en déduire que la propriété d'Archimède n'est pas du premier ordre).

Théorème 10 *On peut énoncer le théorème de compacité avec le vocabulaire de la topologie (j'adore ce théorème étrange)*

Soit S l'ensemble des théories complètes du langage $\mathcal{L}$. Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}$ et $O_\phi = \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \vdash \phi\}$. Il est facile de démontrer que les O_ϕ forment une base d'ouverts. Pour cette topologie S est Hausdorff (facile à démontrer) et tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini donc S est compact (ce qui se démontre à l'aide du théorème de compacité, bien sur). Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de S , comme les O_ϕ forment une base d'ouverts, on peut considérer que $\mathcal{R} = \{O_\phi : \phi \in \Psi\}$ pour un certain ensemble Ψ de formules. Je note $\bar{\phi}$ la formule non ϕ .

Soit $\bar{\Psi} = \{\bar{\phi} : \phi \in \Psi\}$. Si $\bar{\Psi}$ est consistant il existe une théorie complète contenant $\bar{\Psi}$ c'est à dire qui ne contient aucune formule de Ψ , ce qui est contradictoire avec le fait que $\mathcal{R}$ est un recouvrement. Donc $\bar{\Psi}$ n'est pas consistante, par le théorème de compacité il existe une partie finie Ψ_0 de $\bar{\Psi}$ qui n'est pas consistante. $\bar{\Psi}_0$ est un sous ensemble fini de $\bar{\Psi}$. Pour toute théorie $\mathcal{T}$, si $\mathcal{T}$ ne contient aucune formule de $\bar{\Psi}_0$, alors $\mathcal{T}$ contiendrait toutes les formules de Ψ_0 ce qui est contradictoire (puisque Ψ_0 n'est pas consistante), et donc $\mathcal{R}' = \{O_\phi : \phi \in \bar{\Psi}_0\}$ est un sous recouvrement fini de S extrait de $\mathcal{R}$.