Jean-Philippe VASSAN - 3, allée des gros buissons 92150 SURESNES (France) - Tél : (+33) 01 47 72 67 95
Les informations de ce document peuvent être reproduites librement à condition de mentionner le nom de l'auteur.

Découverte mathématique très importante, dont l'étude reste à faire. Le mathématicien Lucas s'y était intéressé dans sa Théorie des nombres, et l'Ecole Polytechnique française cherche toujours…

La suite de Fibonacci permet de calculer les puissances du nombre d'Or en fonction de ce même nombre. C'est un cas particulier appliqué au nombre d'Or, car cela vaut pour tous les nombres. C'est la suite des puissances.

LA RÉCURRENCE DE FIBONACCI EST L'ARBRE QUI CACHE LA FORÊT DES NOMBRES.

1°) <u>La suite des puissances des nombres :</u>

Pour tout nombre β, entier relatif, on a une suite récurrente des puissances de β de la forme :

$U_n = \beta^n = a_n . \beta + b_n$ avec $U_1 = \beta$ donc $a_1 = 1$

et $U_2 = \beta + £$ où $£ = \beta . (\beta - 1)$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = \beta . (\beta - 1)$

On a : $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} . b_{n-1} / a_{n-2}$

2°) <u>Les triangles des puissances des nombres (ou les paraboles des puissances des nombres) :</u>

Pour tout nombre X, entier relatif, on construit un triangle à partir de la fonction de départ :

$f_1(X) = (X - \beta) (X + \beta - 1)$ suivant la règle : Le terme de la ligne du dessous est la somme des deux termes précédents de la ligne du dessus.

Prenons par exemple β = 2, on a : $f_1(X) = (X - 2) (X + 1) = X^2 - X - 2$

On construit le triangle associé au chiffre 2 :

+1 -1 -2
+1 0 -3 -2
+1 +1 -3 -5 -2
+1 +2 -2 -8 -7 -2
etc…

Exemple : la troisième ligne se lit de la façon suivante : $X^4 + X^3 - 3 X^2 - 5 X -2 = f_3(X)$

Le passage d'une fonction $f_n(X)$ à la fonction de rang supérieur $f_{n+1}(X)$ revient à multiplier $f_n(X)$ par (X+1).

Les fonctions $f_n(X)$ sont des paraboles centrées sur 0,5.

3°) <u>Les équations remarquables :</u>

A partir du triangle associé au nombre β, entier relatif, on a une infinité d'équations polynomiales que l'on résout simplement par récurrence pour retrouver la suite des puissances des nombres énoncée en 1°).

Pour β = 2, on reprend le triangle établi précédemment.

$\beta^2 - \beta - 2 = 0$ $\beta^2 = \beta + 2$

$\beta^3 - 3 \beta - 2 = 0$ $\beta^3 = 3 \beta + 2$

Puis, on remplace β^2 et β^3 par leur expression en fonction de β pour déterminer β^4 en fonction de β, soit :

$\beta^4 + \beta^3 - 3 \beta^2 - 5 \beta -2 = 0$ $\beta^4 = 5 \beta + 6$

On retrouve la suite des puissances du chiffre 2 :

$\beta^1 = \beta$

$\beta^2 = \beta + 2$

$\beta^3 = 3 \beta + 2$

$\beta^4 = 5\beta + 6$

Grace au 1°) on en déduit : $\beta^5 = (5+6)\beta + (5x6/3) = 11\beta + 10$ qui est la solution de l'équation :

$\beta^5 + 2\beta^4 - 2\beta^3 - 8\beta^2 - 7\beta - 2 = 0$

Jean-Philippe VASSAN