# Exercices de maths

**Exercice 1**

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.En comparant les aires des rectangles, le premier de base $x = k$ , $x = k+1$, et de hauteur $\frac{1}{k+1}$, le deuxième de base $x = k$ , $x = k+1$, et de hauteur $\frac{1}{k}$ avec l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations $x = k$ et $x = k+1$ et la courbe d'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ ,
montrer que : .
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique de terme général : $u_n = .\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ , $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire la nature de cette suite.

**Exercice 2**

Montrer que si, pour $1 \leq k \leq n$, $0 \leq a_k < b_k < 1$ et $b_k - c_k < c$, alors $\prod_{k=1}^{n} b_k - \prod_{k=1}^{n} a_k < nc$.

**Exercice 3**

1. Soit $z_1$, $z_2$,..., $z_n$ , $n$ nombres complexes donnés. Montrer que : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ (|| désigne le module).
2. En déduire que pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, on a : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\right)^2$.
   Dans quel cas y-a-t-il égalité?

**Exercice 4**

Montrer que si $x$ et $y$ sont deux réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors : $1 + xy > 0$ et que $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.